

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

51e jaargang
1975/1976
no 6
februari

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - W. Kleijne, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - Drs. F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - P. Th. Sanders - Dr. P. G. J. Vredenduin - Drs. B. J. Westerhof.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 25,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 augustus.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279. Zij dienen met de machine geschreven te zijn.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-13367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan W. Kleijne, De Kluut 10, Heerenveen, tel. 05130-24782.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Dennenlaan 17, Dorst (N.B.).

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 28,50. Een kollectief abonnement (6 exx. of meer) is per abonnement *f* 16,50. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 58, Groningen. Tel. 050-162189. Giro: 1308949.

Abonnees worden dringend verzocht te wachten met betalen tot hen een acceptgirokaart wordt toegezonden.
Abonnementen kunnen bij elk nummer ingaan, maar gelden zonder nadere opgave altijd voor de gehele lopende jaargang.
Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven.

Losse nummers *f* 5,— (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).

Advertenties zenden aan:

Intermedia bv, Postbus 58, Groningen, tel. 050-162222.
Tarieven: 1/1 pag. *f* 250,—, 1/2 pag. *f* 135,— en 1/4 pag. *f* 75,—.

Plaatsvectoren en vrije vectoren

P. G. J. VREDENDUIN
Doorwerth

In het eindexamen mavo-4 1974 kwam het volgende vraagstuk voor:
Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel *XOY* zijn gegeven:

het punt *A* met plaatsvector $\bar{a} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

het punt *B* met plaatsvector $\bar{b} = \begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ en

het punt *C* met plaatsvector $\bar{c} = \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}$.

Toon aan dat de lijn *BC* evenwijdig is met de lijn *OA*.
De heer A. M. J. Schellekens (Boxtel) schrijft me aangaande dit vraagstuk het volgende.
'Veel kandidaten hebben dit onderdeel aldus opgelost:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = 2\bar{a}$$

waaruit de conclusie wordt getrokken: *BC* is evenwijdig met *OA*.
Hoewel, indien het op deze wijze aangetoond was, het goed gerekend werd, is het m.i. wiskundig niet geheel juist daar er op ongeoorloofde wijze omgesprongen wordt met plaatsvectoren en vrije vectoren.'
Hij vraagt mijn mening. Omdat ik deze kwestie van fundamenteel belang vind, lijkt het mij geschikt mijn antwoord op zijn vraag in Euclides te publiceren.

In Euclides **48**, no. 2 (blz. 41–46) heb ik trachten uiteen te zetten, dat het wetenschappelijk niet correct is vrije vectoren en plaatsvectoren bij elkaar op te tellen. De vrije vectoren vormen een vectorruimte, de plaatsvectoren vormen een andere vectorruimte en men kan niet kritiekloos vectoren uit verschillende ruimten bij elkaar optellen. (Voor een uitvoeriger argumentatie zie het desbetreffende artikel.) Met collega Schellekens ben ik het dus helemaal eens.
Hiermee is de moeilijkheid echter niet opgelost, maar hier begint het juist moeilijk te worden. Iedere mavo-leerling begrijpt de door hem gegeven redenering precies. En als de redenering helder en duidelijk is, is hij dan afkeurenswaardig omdat geleerden zich anders plegen uit te drukken?
De kardinale vraag is natuurlijk: wat verstaat de mavo-leerling onder een vector? Voor hem is een vector een pijltje, een gericht lijnstuk. Anders gezegd: een lijnstuk waarvan je de grenspunten begin- en eindpunt noemt. En laat ik nu meteen het ietwat irritante woord mavo-leerling overboord zetten en opmerken, dat dit m.i. voor iedere leerling uit de onderbouw van het voortgezet onderwijs het geval is. Vat men een vector zo op, dan is de gegeven oplossing van het vraagstuk inderdaad doorzichtig en correct.

Vanzelf rijst nu echter de vraag: is het verantwoord in de onderbouw een taal te spreken die afwijkt van de wetenschappelijk-correcte en wijziging behoeft, indien men later wiskunde-II kiest? Inderdaad zou ik de stelling willen verdedigen:
Hoewel het didactisch onmogelijk is in de onderbouw steeds wetenschappelijk-correcte taal te spreken, dient men zijn taal zo te kiezen dat men niet in strijd komt met wetenschappelijk-correct taalgebruik. Het moet mogelijk zijn de 'kindertaal' zo te kiezen, dat vertaling in officiële taal mogelijk is.
Nu moeten we onderzoeken of het vectorbegrip in de onderbouw zo ontwikkeld kan worden, dat enerzijds voor de leerling de vector een pijltje is en dat we anderzijds toch niet in conflict komen met de officiële wetenschap.
We gaan het proberen.
Definitie. Een vector is een gericht lijnstuk. (Mooier gezegd: een lijnstuk waarvan de uiteinden een geordend puntenpaar vormen.)
Definitie. Twee vectoren noemen we gelijk, als ze even lang, evenwijdig en gelijkgericht zijn.
(Wie valt over 'gelijkgericht' is ietwat een kniesoor, maar kniesoren hebben een goed bestaansrecht. Ze mogen zeggen: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ wil zeggen, dat de middens van de lijnstukken AD en BC samenvallen.)
De optelling geschiedt natuurlijk met behulp van de kop-staart-methode.
Definitie. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AP}$, waarin $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CD}$.
(Als men gelijke vectoren optelt bij gelijke vectoren, zijn ook de sommen gelijk.)
Wat zijn nu plaatsvectoren? Kies in het vlak een punt O. Onder een plaatsvector (in het zo 'gepunte' vlak) verstaan we een vector met beginpunt O.
Opmerking. We laten ook toe, dat begin- en eindpunt van een vector samenvallen. Een vector waarvan begin- en eindpunt samenvallen, heet een nulvector.
Nu is er geen vuiltje meer aan de lucht. Men kan vrijelijk plaatsvectoren en niet-plaatsvectoren bij elkaar optellen, want het zijn allemaal vectoren.

Ten slotte moeten we nog proberen een brug te slaan tussen dit 'kindervectorbegrip' en het officiële. Is er een soort vertaling mogelijk van de kindertaal in de officiële?
Om tot het begrip vrije vector te komen, moeten we onderling gelijke kindervectoren onder één hoedje vangen. De vrije vectoren zijn dus ekwivalentieklassen van kindervectoren. De ekwivalentierelatie die deze klassen doet ontstaan, is de gelijkheid. De kindervectoren zijn dus representanten van vrije vectoren. De plaatsvectoren ook; deze vormen een echte deelverzameling van de kindervectoren. Optelling van kindervectoren wordt vertaald in optelling van vrije vectoren waarvan deze kindervectoren een representant zijn (ongeacht of de kindervector nu een plaatsvector is of niet).

Ik dacht hiermee de vraag van collega Schellekens beantwoord te hebben.
Nu ik dit onderwerp aangeroerd heb, wil ik tevens iets vertellen over mijn persoonlijke ervaringen met deze stof.
Ik heb me aanvankelijk op het wetenschappelijke standpunt gesteld.
Ik heb in de onderbouw geen vrije vectoren ingevoerd (ook geen kindervectoren), maar uitsluitend plaatsvectoren. Het werd een wetenschappelijk

fraai geheel, dat u kunt vinden in mijn schoolboek Wiskunde vwo, deel 2. Helaas was de methode didactisch onbruikbaar. Met enige moeite kon men de leerlingen (althans onze gymnasiumleerlingen) nog wel aan hun verstand brengen wat er in het boek stond. Maar ze konden hoogstens het geleerde reproduceren en de vraagstukken maken; er was echter geen sprake van dat ze de portee van het gebodene doorzagen. Het waren parelen voor de engelen, maar de engelen zagen niet, dat het parelen waren. En daarmee was het doodvonnis over de gevolgde methode getekend.

Ook technisch hadden de plaatsvectoren een groot nadeel. Je kon niet optellen met behulp van de kop-staart-methode en daardoor werd het opereren met deze vectoren moeilijk en konden ze niet met vrucht gebruikt worden voor het vinden van meetkundige eigenschappen.
Een opmerking van collega Kindt bracht mij op het goede spoor. Hij raadde me aan in de onderbouw niet met plaatsvectoren maar met vrije vectoren te werken. Echte vrije vectoren, ingevoerd als ekwivalentieklassen, leken mij wat te moeilijk. En zo kwam ik tot de kindervectoren. Hiermee kan men uitstekend vraagstukken maken. Een paar voorbeelden.

1 De diagonalen van een vierhoek delen elkaar middendoor. Bewijs dat de vierhoek een parallellogram is.

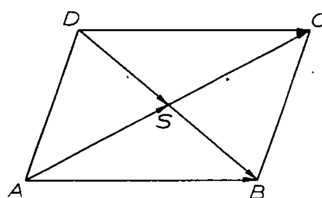


Fig. 1

Bewijs. $\vec{AS}+\vec{SB} = \vec{AB}$

$\vec{DS}+\vec{SC} = \vec{DC}$ $\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

$\vec{AS} = \vec{SC}$

$\vec{SB} = \vec{DS}$

Dus zijn de lijnstukken AB en CD gelijk en evenwijdig.

2 In fig. 2 is $AD = k\,AB \wedge AE = k\,AC$. Bewijs dat de lijnstukken BC en DE evenwijdig zijn en dat $DE = k\,BC$.

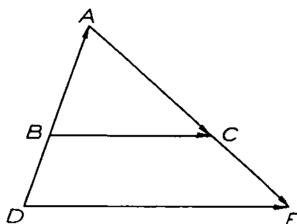


Fig. 2

Bewijs. $\left.\begin{array}{l}\vec{BA}+\vec{AC}=\vec{BC}\\ \vec{DA}+\vec{AE}=\vec{DE}\\ \vec{DA}=k\,\vec{BA}\\ \vec{AE}=k\,\vec{AC}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{DE}=k\,\vec{BC}$

waaruit volgt, dat de lijnstukken DE en BC evenwijdig zijn en dat $DE = k\,BC$. $DE = k\,BC$.

(Vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal en distributieve eigenschap moeten natuurlijk inmiddels behandeld zijn.)

3 In fig. 2 is lijnstuk BC evenwijdig aan lijnstuk DE. Bewijs dat $AB:AD = AC:AE = BC:DE$.

Bewijs. Onderstel dat $\vec{DE} = k\,\vec{BC}$. Dan geldt

$\left.\begin{array}{l}\vec{BA}+\vec{AC}=\vec{BC}\\ \vec{DA}+\vec{AE}=\vec{DE}\\ \vec{DE}=k\,\vec{BC}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{DA}+\vec{AE}=k(\vec{BA}+\vec{AC}) \Rightarrow \vec{DA}-k\,\vec{BA}=-\vec{AE}+k\,\vec{AC}$

Als twee vectoren met verschillende dragers gelijk zijn, zijn ze beide $\vec{o}$. Dus is

$\vec{DA} = k\,\vec{BA} \wedge \vec{AE} = k\,\vec{AC}$

Waarmee de stelling bewezen is.

Iets moeilijker, maar ik doe het alleen maar zo voor de aardigheid. Het kan ook eenvoudiger. Men leidt met behulp van vectoren eerst de theorie van de vermenigvuldiging van figuren af. En daarvoor zijn deze vectoren uitermate bruikbaar. Vermenigvuldig nu driehoek ABC vanuit A zo, dat D het beeld is van B. Wegens de evenwijdigheid van de lijnstukken BC en DE is dan E beeld van C. En nu zijn we er.

4 In figuur 3 zijn de lijnstukken AB en DE evenwijdig en eveneens de lijnstukken BC en EF. Bewijs dat ook de lijnstukken CA en FD evenwijdig zijn.

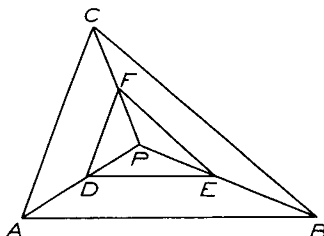


Fig. 3

Het bewijs laat ik aan de lezer over.

Op deze wijze krijgen de vectoren een functie in de opbouw van de meetkunde in de onderbouw. Deze functie wordt nog versterkt, als men het inprodukt van vectoren invoert. De stelling van Pythagoras, de overige eigenschappen van de rechthoekige driehoek, de cosinusregel liggen dan voor het grijpen. De theorie van de gelijkvormigheid, die vroeger zo'n grote rol speelde, kan men missen. Men kan dan de meetkunde opbouwen met behulp van twee fundamentele methoden: het werken met afbeeldingen en het opereren met vectoren. Zo ontstaat een fraai geheel, dat ook voor de leerling begrijpelijk is.

Een leerzame, doch aangename reis

D. VAN DALEN
Utrecht

Op reis van Utrecht naar Mons kwam ik na het overstappen in Rotterdam terecht in een coupé waar al twee heren zaten, die kennelijk in een geanimeerd gesprek waren. Naar hun uiterlijk te oordelen waren hier twee fatsoenlijke burgers op de eerste autoloze zondag de gemakken van de spoorwegen aan het beproeven. Hun kleding was die van de gematigd progressieve intellectueel – ribfluweel, gekleurd overhemd – en hun haardracht was onbestemd. De een had een ongeordende haargroei zoals men die wel bij popsterren aantreft, de ander was vrijwel kaal maar bezat een geduchte baard. Uit het feit dat ze tweede klas reisden bleek dat ik met onverdorven naturen zou reizen[1]. Gemakshalve zal ik de beide heren verder aanduiden met H (de harige) en B (de baardige). Nauwelijks had de trein Rotterdam-Centraal verlaten of de heren hervatten de discussie:

H: Het boek dat ze op mijn school gebruiken lijkt nergens naar. Ik ben nu al aan het vierde deel en er wordt nog steeds niets bewezen.

B: Nou, en? Waarom zou je dingen gaan bewijzen die je zo ziet. Als je dingen gaat bewijzen maak je het alleen maar mysterieus voor de leerlingen.

H: Als je stellingen niet bewijst, of als je alleen maar opgaven geeft van de soort 'waar snijden de diagonalen van een ruit elkaar?', dan verlaag je de wiskunde tot een soort abstracte aardrijkskunde. Zoals je de hoofdsteden van de Europese landen leert, zo leer je de eigenschappen van de vierhoeken. Simon Stevin sprak niet voor niets van WISKUNDE, d.w.z. de wetenschap van wat wis en zeker is. Kun jij mij dan uitleggen hoe je ergens zeker van kunt zijn als je er geen bewijs van hebt?

B: Nee, eigenlijk niet. Maar ik zie ook niet in waarom je dingen zou bewijzen die zeker zijn. Je bewijst toch ook niet dat Rome de hoofdstad van Italië is?

H: Dat dank je de koekoek. We hebben nu eenmaal een soort afspraak (met historische motivering) dat we Rome de hoofdstad noemen, daar valt ook niets te bewijzen. Net zo min als je gaat bewijzen dat de lijn door twee niet opvolgende hoekpunten van een vierhoek een diagonaal is. Dat weten we al per definitie. Nee, dan moet je een zinniger voorbeeld verzinnen. Neem nou de irrationaliteit van $\sqrt{2}$, hoe weet je dat er geen p en q bestaan zodat $2 = p^2/q^2$ met p en q positief en geheel? Dat is toch zeker geen waarheid die je zo ziet, anders had Euclides het ook wel als trivaliteit gepresenteerd.

B: Accoord, voor de irrationaliteit van $\sqrt{2}$ heb je een bewijs nodig, maar voor leerlingen van 12 jaar is dat voorbeeld wel erg gezocht. Daarmee kan ik ze de noodzaak van het bewijzen niet aanpraten. Hoe doe jij dat?

Oh, maar wij vervelen meneer hier misschien?
I(k): Helemaal niet, Uw problemen interesseren mij wel degelijk. Ik vermoed dat ik een verre collega van U ben.

H: Prachtig, wij zijn wiskundeleraren, zoals U al vermoed zult hebben.

I: Ik verdien ook de kost met wiskunde en als het U niet stoort zou ik ook wel een duit in het zakje willen doen.

B: Welkom, staat U aan mijn kant of bent U net zo'n bewijsneuroticus als mijn vriend hier?

I: Ik moet U teleurstellen, in grote trekken sta ik achter Uw vriend's bewering dat we wiskundige feiten pas door een bewijs zeker maken d.w.z. boven alle twijfel verheffen. WISKUNDIGE WAARHEID IS ABSOLUUT, daardoor onderscheidt zij zich b.v. van natuurkundige waarheid. Geen redelijk mens zal er zijn hoofd onder verwedden dat zijn keteltje water precies bij 100 °C (en 1 atmosfeer) kookt, maar hij zal rustig zijn hoofd beschikbaar stellen voor de weddenschap dat vijf plus vijf gelijk aan tien is.

H: Bedankt voor Uw bijval, maar ik meen dat het met die absoluutheid van de wiskundige waarheid toch niet zo goed gesteld is. Er is al driekwart eeuw bijna onenigheid over de geldigheid van het keuzeaxioma en dan zijn er nog intuïtionisten die zelfs tegen het principe van de uitgesloten derde bezwaar hebben.
Uw 'absoluut' lijkt mij in strijd met het gebrek aan eensgezindheid onder de wiskundigen.

I: Daar noemt U een paar zaken op. Laat ik proberen om mij wat nauwkeuriger uit te drukken: zeker, er zijn axioma's waarover men van mening verschilt. Het enige wat we daaruit kunnen concluderen is, dat we in zo'n geval (nog) niet over genoeg zekerheid (of evidentie) beschikken om ze *waar* te noemen. Wat het keuze-axioma betreft, de resultaten van Cohen laten zien dat men, bij het gebruik van de gangbare axiomastelsels, net zo goed het keuzeaxioma kan aannemen als verwerpen. In beide gevallen krijgt men een interessant stuk wiskunde[2].
Wat betreft het principe van de uitgesloten derde heeft Brouwer ons uitvoerig de les gelezen. Het staat nu toch wel als een paal boven water dat er meer goede argumenten tégen het principe dan er voor zijn. We kunnen alleen maar zeggen dat het leven plezieriger is mèt dan zonder.

B: Dit gaat mij boven de pet. Eerst zijn de wiskundige waarheden absoluut en dan hebben we nog geen zekerheid voor het keuzeaxioma. Trouwens, waar komt die zekerheid, waarheid, en wat dies meer zij, vandaan?

H: Goeie vraag. Je weet iets zeker als je het bewezen hebt.

B: O.K., maar dan zijn we nog verder van huis omdat we dan logica nodig hebben. Je kunt toch niet in een eerste klas aan twaalfjarigen logica[3] gaan onderwijzen?

H: Ik geloof dat je het slachtoffer bent van hersenspoeling. Je hebt teveel naar de logici geluisterd. Laten we aannemen dat inderdaad een bewijs een

eindig rijtje uitspraken is, waarvan ieder een axioma is of volgens een regel uit de voorgaanden volgt, zoals de logici sinds Frege prediken, dan bestonden er dus voor Frege geen bewijzen! Nee, dit keer zit je er totaal naast. In de logica formaliseert men bestaande praktijken. I.h.b. wisten de wiskundigen al wat een bewijs was voordat zij het begrip konden formaliseren. Wiskunde beginnen met logica is het paard achter de wagen spannen. Ik beweer dat LOGICA KOMT NA WISKUNDE.

B: Braaf gesproken, nu weet ik nog niet wat een bewijs is.

H: Het meest bevredigende antwoord op de vraag wat een bewijs is, werd, wat mij betreft, gegeven door Brouwer en Heyting. Zij zeggen dat een bewijs een geestelijke constructie is. Laat ik een eenvoudig voorbeeld geven. Hoe bewijzen we $2+3 = 5$? Om te beginnen moeten de getallen 2, 3 en 5 uit eenheden geconstrueerd worden, dat achtereenvolgens samenvoegen van eenheden is weer een proces in de geest. Wie geen geest heeft, of er niet in kan werken, kan gemakshalve streepjes op papier zetten. Weet je, ik zal het raam gebruiken dat is toch bewasemd.

B: Bravo, de improviserende didacticus.

H: Ik behelp me, net als Archimedes. Kijk, hier is // en hier /// en hier /////. Nu ga ik // en /// optellen, d.w.z. ik veeg steeds van het eerste groepje er één uit en voeg er één bij het tweede groepje – dat is mijn eerste constructie. Nu ga ik de twee resterende groepjes vergelijken. Daartoe veeg ik steeds van beide groepjes één streepje weg – dat is mijn tweede constructie. Als ze gelijk op zijn dan constateer ik de gelijkheid. Je ziet hier dat het uitkomt.

B: Ja, dat gaat goed voor zulke kinderachtige stellingen, maar wat moet ik nu met samengestelde beweringen?

H: Daarvoor heeft Heyting de *bewijsinterpretatie* uitgevonden[4]. We zijn het er nu hopelijk over eens dat we iets als 'waar' accepteren als we er een bewijs voor hebben.

B: Ho, ho. Hebben mijn geëerde leermeesters mij niet altijd voorgehouden dat we 'bewijsbaarheid' van 'waarheid' moeten onderscheiden?

I: Uw leermeesters bedoelden met 'bewijsbaarheid' waarschijnlijk 'bewijsbaarheid in een zeker formeel systeem'. Het is a priori helemaal niet duidelijk dat 'formele bewijsbaarheid' iets met 'waarheid' van doen heeft. Voor de gangbare predicatenlogica heeft Gödel de volledigheid bewezen[5], d.w.z. de overeenstemming van 'waarheid' en 'formele bewijsbaarheid', maar dat was helemaal niet triviaal. Wat Uw collega op het oog heeft is juist de *waarheid* en die komt niet uit de lucht vallen. Preciezer gezegd 'de zin A is waar in de structuur S' moet bewezen worden en wel met de informele bewijsmethoden[6]. Deze ongeformaliseerde bewijsbaarheid is het dan ook die een rol speelt juist bij de eerste stappen in de wiskunde.

H: Precies, ik heb *echte* inhoudelijke bewijzen op het oog en niet hun formele afspiegelingen. Maar laat ik eerst even vertellen hoe we samengestelde beweringen aanpakken. In de praktijk van de wiskunde stelt men uitspraken

samen met de bekende voegtekens $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$, $\forall$, $\exists$, ik kan dus volstaan met te zeggen wat bewijzen zijn van conjuncties, disjuncties, etc. Daar gaat ie dan:

1 ik heb een bewijs voor $A \wedge B$ als ik bewijzen voor A en B afzonderlijk heb.
2 Ik heb een bewijs voor $A \vee B$ als ik een constructie heb om een van beide uitspraken aan te wijzen en daarvoor een bewijs te vervaardigen.
3 Ik heb een bewijs voor $A \rightarrow B$ als ik een constructie heb om ieder bewijs van A in een bewijs voor B om te zetten.
4 Ik heb een bewijs voor $\neg A$ als ik een constructie heb om ieder bewijs van A in een bewijs van een contradictie (zoiets als $0 \neq 0$) om te zetten.
5 Ik heb een bewijs van $\forall x\ A(x)$ als ik een constructie heb die voor ieder ding a (afhankelijk van het onderwerp van discussie) een bewijs van $A(a)$ maakt.
6 Ik heb een bewijs van $\exists x\ A(x)$ als ik een constructie heb die een ding a aanwijst en daarbij een bewijs van $A(a)$ levert.

B: Ik begrijp waar je heen wilt. Je breekt op de gangbare manier uitspraken af en bekijkt de delen. Er blijven voor mij 2 vragen over:
1 houdt dat afbreken na eindig veel stappen op?
2 wat is een bewijs van een onafbreekbare uitspraak?

H: Je eerste vraag kan ik direct met ja beantwoorden. In ieder logicaboek kun je nalezen waarom het afbraakproces eindigt. Je tweede vraag kan ik niet beantwoorden. Als je mij zo'n atomaire uitspraak voorschotelt kan ik erover nadenken, in het algemeen kan ik er niet veel van zeggen. Tenslotte heb ik andere argumenten nodig om vast te stellen of een punt in een vlak ligt dan wel of $3+2 = 5$. Kortom atomaire uitspraken moeten per geval bekeken worden. Misschien vind je dit geen bevredigend antwoord, laat ik je dan troosten met de mededeling dat voor de rekenkunde wèl vaststaat wat bewijzen voor automaire uitspraken zijn. Wel, ben je nu tevreden over mijn uitleg van 'bewijsbaarheid'?

B: Mij te moeilijk. Zijn waarheidstafels dan niet veel gemakkelijker? En dan nog iets, als mijn geheugen mij niet bedriegt levert deze interpretatie de intuïtionistisch ware uitspraken op. Het kan toch niet je bedoeling zijn om de jeugd tot intuïtionisten op te leiden?

H: Laat ik het laatste punt het eerst beantwoorden. Je hebt gelijk, klassieke[7] uitspraken zoals 'a is rationaal of irrationaal' kunnen niet bewezen worden. Laten we de vraag of dat erg is maar laten rusten. In ieder geval willen we de mogelijkheid van een tweewaardige klassieke logica openhouden. Welnu dat kan door het principe van de uitgesloten derde als verregaande idealisering te veronderstellen. Dat wil zeggen, we redeneren, zoals ik zojuist aangegeven heb, maar we mogen op ieder moment (zonder bewijs) $A \vee \neg A$ gebruiken. Wat je eerste punt betreft; het is helemaal niet moeilijk en het is bovendien veel intuïtiever. Ik zal je een paar voorbeelden geven.
i *Modus Ponens.* Als ik een bewijs α voor A heb en een bewijs voor $A \rightarrow B$, dan heb ik ook een bewijs voor B. Het bewijs van $A \rightarrow B$ verschaft mij nl. een constructie op ieder bewijs van A omzet in een bewijs van B, welnu laat die constructie op α werken, dan krijg ik automatisch een bewijs voor B.
ii *Reductie ad Absurdem* $(A \rightarrow (B \wedge \neg B)) \rightarrow \neg A$.

Ik moet een methode hebben om ieder bewijs van $A \rightarrow (B \wedge \neg B)$ om te zetten in een bewijs van $\neg A$. Een bewijs α van $A \rightarrow (B \wedge \neg B)$ is een constructie die ieder bewijs van A omzet in een bewijs van $B \wedge \neg B$. Welnu, volgens afspraak is α een bewijs van $\neg A$. De gezochte methode is dus eenvoudig: voer een bewijs voor $A \rightarrow (B \wedge \neg B)$ in zichzelf over. Je ziet, het is allemaal heel vanzelfsprekend.
Ik moet mij verontschuldigen dat het allemaal wel een beetje plechtig klinkt, beschouw het maar als 'opmerkingen van een hoger standpunt! Voor schoolgebruik kun je voor (3) veilig zeggen $A \rightarrow B$ betekent 'uit A kan ik B afleiden'.

B: Ik geef toe dat op deze manier de logica overbodig wordt. Ik moet zeggen dat ik me nu wel wat bekocht voel, heb ik dan voor niets logica geleerd?

H: Zover zou ik niet willen gaan. Op een elementair niveau is logica een stukje 'inzicht achteraf', anders gezegd, als we allang wiskunde bedreven hebben en stellingen bewezen dan kunnen we dit redeneren zelf analyseren en ontdekken dat ook daar weer een wiskundige structuur inzit. Deze laatste wiskundige structuur is het onderwerp van de logica. Op een wat hoger niveau levert de logica zelfs nuttige inzichten voor de praktijk van de wiskunde. Je kunt bijvoorbeeld aan de vorm van de axioma's van een theorie zien hoe de modellen zich in bepaalde opzichten gedragen. Om een voorbeeld te noemen: De modellen van een theorie zijn dan en slechts dan gesloten onder homorfismen als er een axiomastelsel is waarin alle axioma's positief zijn[8]. Ik spreek zo nog niet van de rol van de logica in het grondslagenonderzoek. Daar zou je niet ver komen zonder logica. Overigens klinkt dat diepzinniger dan het bedoeld is. Er is een duidelijke analogie met de uitspraak 'in de functionaalanalyse kom je niet ver zonder lineaire algebra'.
Om het nog eens expliciet te zeggen: *logica is niet de grondslag van de wiskunde*[9]. Het is wèl een handig technisch apparaat. De formalistische school vindt de logica wel belangrijk bij de fundering van *formele* wiskunde, maar we moeten dan ook niet vergeten dat voor Hilbert *de* wiskunde (of de *eigenlijke* wiskunde) de finitistische wiskunde is[10].

B: Wel, wel, op deze reis leer ik nog eens wat. Maar nu een praktisch punt: hoe praat ik mijn leerlingen aan dat je bewijzen moet geven voor je beweringen. En nu geen filosofische kattekrats maar klare onderwijsstrategie.

H: Ho, ho, eerst moet ik je ernstig terechtwijzen. Je geringe achting voor filosofie is waarschijnlijk gebaseerd op een gebrek aan kennis van de materie, of misschien wel op het lezen van slechte filosofie. *Goede* filosofie draagt wèl bij tot beter begrip en tot diepgaande analyse. Ik kan je zo een aantal namen en artikelen noemen die garant staan voor filosofie van niveau. Maar nu je didactische probleem. Tja, daar heeft iedereen zo zijn methoden voor. Ik wijs altijd op de toepassingen. Als ik bijvoorbeeld een brug bouw, dan moet ik van te voren weten hoe dat moet gebeuren (proberen is er niet bij) en ik moet kunnen aantonen dat de brug een last van laten we zeggen, 2 ton moet kunnen dragen. De enige manier om dat klaar te spelen is de toepassing van wiskunde, compleet met een bewijs dat de brug het zal houden. Een analoog, maar nog veel spectaculairder argument is dat van de ruimtevaart. Men moet niet alleen een raket de ruimte in kunnen sturen, men moet ook nog een capsule

op een klein stukje maan neer kunnen zetten met een grote nauwkeurigheid. Hoe kan men zo zeker van baancorrecties, snelheden e.d. zijn? Alleen door wiskundig te bewijzen dat alles zal kloppen.

B: Zo'n tactiek pas ik ook wel toe. Maar ik vind het toch wel onbevredigend. De leerlingen moeten mij maar geloven. Er gaat niets boven persoonlijke ervaring, misschien weet de Heer I er iets op?

I: Ik wil U mijn strategie wel verklappen. Ik begin met een heel eenvoudig spelletje met de klas te spelen. Bij voorbeeld het volgende spel voor 2 personen. Neem een stapel van 11 lucifers, daarvan mogen de deelnemers beurtelings hoogstens 3 en minstens 1 lucifer afnemen. Wie de laatste neemt verliest. Ik zorg dat de eerste zet voor mij is. Ik zal schematisch een spelletje op het raam zetten.

I		2		3		2	
	II		1		2		1
	11	9	8	5	3	1	0	stapeltje

U ziet ik win. Als we dat spelletje een tijdje gespeeld hebben, beginnen de leerlingen mij al een beetje door te krijgen. En terecht, want ik heb een winnende strategie (let op de getallen 9, 5, 1 !). Een slimmerik daagt mij uit en zegt te zullen winnen als hij mag beginnen. En ja, hij wint. Nu voer ik de psychologische oorlogsvoering wat op. Ik daag hem uit zijn bromfiets in te zetten tegen één gulden van mij. Aarzeling, discussies in de klas. Tenslotte aanvaardt hij de uitdaging. Natuurlijk wint hij. Nu laat ik hem uitleggen waarom hij zijn bromfiets durfde wagen. En wonder oh wonder, hij levert op het bord een correct *bewijs* dat zijn strategie altijd winst levert. Nu is het voor mij een koud kunstje om het belang van het *bewijzen* en *van absolute zekerheid* aan de klas te slijten. Misschien zullen ethisch hoogstaande collega's deze methode veroordelen wegens het speculeren op het bezitsinstinct, maar het werkt wèl.

H: Leuk dat moet ik ook eens proberen.

Op dit moment komt de conducteur onze kaartjes controleren.

C: Dank U. Allemaal naar Mons. Nou, nou, mag U thuis ook zo op de ramen kliederen?

B: Voorzichtig conducteur, dit is Wiskunde. Kom erbij zitten dan kunt U nog wat leren.

C: Dat zou niet gek zijn, dan kan ik mijn zoon helpen. Wat die tegenwoordig voor wiskunde krijgt! Verzamelingen en dat soort gedoe. Ik zeg maar, verzamelen kan hij thuis wel. Postzegels en zo, begrijpt U.

B: Ja, dat is vooruitgang. Wat kan het ons schelen of de loodlijnen van een driehoek door een punt gaan, zolang we maar verzamelingen kunnen verenigen of doorsnijden.

C: Ik zie het al, de wiskunde is ook niet meer wat het geweest is. Ik ga maar weer een deur verder, misschien zit daar wel een natuurkundige, die kan me wel uitleggen hoe ik een atoombom moet maken.

H: Veel succes conducteur. Dan zal ik intussen mijn vriend spiegelen in de x-as.

Conducteur exit.

B: Nu zijn we toch echt bij het hart van de moderne wiskunde beland. Verzamelingsleer, het vak van de toekomst.

H: Aha, een ziener in ons midden. Vertel eens, wat is zo bijzonder met die verzamelingen?

B: Je boft, toevallig ging mijn scriptie over verzamelingsleer. Ik kan je haarfijn voorlichten. Eigenlijk kan ik met één zinnetje volstaan: Wiskunde is Verzamelingsleer. D.w.z. alles wat we zo in de wiskunde tegenkomen kunnen we definiëren in de verzamelingsleer. Voorbeelden te over; natuurlijke getallen, rationale getallen, reële getallen, functies, ellipsen, algebraïsche oppervlakken, enz. enz.

H: Zoiets heb ik wel eens geleerd, maar wat dan nog. Moet je niet om te beginnen dingen hebben die verzamelingen kunnen vormen? M.a.w. zijn verzamelingen wel zo fundamenteel?

B: Grote genade, heb je geslapen sinds 1900? De verzamelingsleer, bij voorbeeld van Zermelo-Fraenkel, laat juist zien dat je behalve verzamelingen niets nodig hebt. Objecten of oerelementen kunnen gemist worden. De verzamelingsleer maakt een zo sterk mogelijke wiskunde met zo weinig mogelijk primitieve begrippen en vooronderstellingen. De enige primitieve begrippen zijn 'verzameling' en 'element zijn van'.

H: Betekent dat, dat we voor Zermelo en Fraenkel niet wisten wat een functie was?

B: Inderdaad, er waren wel een massa individuele functies bekend, maar het algemene functiebegrip ontbrak.

H: De vraag is of dat zo erg is. Ik heb weer dezelfde problemen als toen straks met de logica. Ik zal even een formele uitdrukking opschrijven:

$$\forall x(x \in F \rightarrow \exists u, v(x = (u, v))) \wedge \forall x, y, z((x, y) \in F \wedge (x, z) \in F \rightarrow y = z)$$

Deze zin zegt dat F een functie is, maar hoe weet ik dat? Op z'n minst moet ik vroeger al geweten hebben wat een functie was om er nu zo zeker van te zijn. Kennelijk is er een functiebegrip dat vooraf gaat aan jouw functiebegrip. Tegenover jouw functiebegrip prefereer ik de traditionele versie: *Een functie is een voorschrift dat aan iedere a precies één b toevoegt* (hier zijn *a* en *b* objecten die in het voorschrift gespecificeerd worden).

B: Je bent zeker nog steeds niet uitgeslapen. Iedereen weet toch dat je alleen met definieerbare functies niet ver komt. Er bestaan nu eenmaal niet-definieerbare functies, probeer die maar eens met een voorschrift te vangen.

H: Ik beweer niet dat ik met mijn functie alles kan, alleen maar dat
1e voor schooldoeleinden het oude functiebegrip voldoende is,
2e het oude functiebegrip didactisch beter is in te voeren,
3e het oude functiebegrip natuurlijker is dan het verzamelingstheoretische.

I: Het lijkt mij dat H op punten wint. Ik kan daar nog wat aan toevoegen: in de verzamelingsleer worden allerlei objecten van de informele wiskunde geïmiteerd. Daar worden natuurlijke getallen enz. gedefinieerd, die juist de gewenste eigenschappen hebben. Maar daarom zijn ze nog niet de originele objecten, het zijn surrogaten opgebouwd uit louter verzamelingen. Erg knap – maar net als de logica – pas te nuttigen nadat men voldoende wiskunde genoten heeft. Natuurlijk heeft het verzamelingstheoretische functiebegrip zijn toepassingen, maar die vallen bijna allemaal buiten de schoolstof. Als didactische vuistregel zou ik U aanbevelen: **voer geen dingen in die niet echt gebruikt worden.**

B: Ik ben nog niet overtuigd dat we de functie als verzameling paren kunnen missen. Hier is een voorbeeld van een echte toepassing van het moderne functiebegrip. Een natuurkundige meet kookpunten van water bij variabele druk, dan beschouwt hij paren p, t waarbij p de druk is en t het kookpunt. Hij maakt dan een functie door steeds nieuwe paren toe te voegen aan de bestaande verzameling.

H: Dat is een slecht voorbeeld. De man zal zeker geen functie vinden. Hij meet bij voorbeeld voor water de kookpunten 99,8°, 111,2°, 100,3°, 119,7°, 111,4°, 120,9°, bij resp. 1, 1,5, 1, 2, 1,5, 2 atm. Maar het resultaat is geen functie. Sterker nog, hij wil van het begin af aan een functie krijgen, daartoe trekt hij na de proef een geschikte kromme.

B: Goed, ik geef op. Maar ik blijf bij $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$!
Trouwens, ik had nog meer pijlen op mijn boog. In ieder geval zullen we toch verzamelingen als primitief begrip in de wiskunde moeten aanvaarden.

H: Argumenten, alstublieft!

B: Met genoegen. Ten eerste: *het is het simpelste begrip in de wiskunde.* Verzamelingen hebben totaal geen structuur. Ten tweede: *uit verzamelingen kun je alles definiëren wat je in de praktijk van de wiskunde nodig hebt.* In een notedop zijn dat mijn argumenten.

H: Het tweede argument vind ik het zwakste. Dat de verzamelingsleer sterk genoeg is om een groot deel van de wiskunde te imiteren geef ik toe. Maar naar mijn smaak is die opbouw erg gekunsteld. Kijk bij voorbeeld eens naar de definitie van geordend paar: $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Niemand denkt toch werkelijk aan de verzameling in het rechterlid wanneer hij met geordende paren werkt. Alles wat je nodig hebt is de vastlegging van een volgorde, of anders gezegd: asymmetrie in de elementen van het paar.

B: Nu val je me tegen. Wat is dat voor metafysisch gepraat? Volgorde, asymmetrie? Ik weet pas wat volgorde is, als ik het geordende paar ken. Dan spreek ik af dat

$E(\{\{a\}, \{a, b\}\}) = a$ en $T(\{\{a\}, \{a, b\}\}) = b$

(voor *eerste* en *tweede*). Geef mij eens een begrijpelijke definitie van geordend paar, zonder verzamelingen te gebruiken.

H: Ik zal het proberen. Het geordende paar (m, n) is het getal $2^m . 3^n$.

B: Protest. Dat is een codering. Net zo kunstmatig als mijn definitie. Bovendien werkt hij alleen voor natuurlijke getallen.

H: Protest toegewezen. Het was een flauw grapje. Maar het toont in ieder geval aan dat in ℕ een alternatief paar-begrip voorhanden is. Mijn oplossing voor het algemene geval is als volgt: voer 'paar' als nieuw primitief begrip in, met als axioma $(a, b) = (c, d) \rightarrow a = c \wedge b = d$. Dat correspondeert van nature met het standpunt 'ik weet niet precies wat een geordend paar is, maar ik weet wel wat de grondeigenschap moet zijn'. Vergelijk dit maar met de meetkunde: 'Ik weet niet precies wat punten en lijnen zijn, maar ik weet wel dat door 2 verschillende punten precies één lijn gaat'.

B: Complimenten van Ockham, of je zijn scheermes wilt gebruiken[11].

H: Dank je. Er zijn gevallen waar het gebruik van Ockham's scheergerei tot gekunsteldheid leidt, dit is er één van.

B: In alle ernst, hier is een mogelijkheid om precies en eens en voor altijd te zeggen wat een geordend paar is. En jij geeft de voorkeur aan onwetendheid? Foei!

H: Je moet bedenken dat we wiskunde op het middenniveau bespreken. Op de Universiteit zou ik je gelijk geven, maar voor ongetrainde zieltjes durf ik zo'n exactheid niet te demonstreren. De didactisch juiste oplossing lijkt mij: nergens over praten en gewoon met geordende paren en hun eigenschappen werken. Pas na het gebruik komt de fundering.

B: En wat vind je van mijn eerste argument?

I: Mag ik opponeren?

H: Thans is het woord aan de reiziger I.

I: Dank U. Ik zie helemaal niet in waarom verzamelingen zo simpel zijn. Al in de tijd van de paradoxen ontstond onzekerheid over de vraag wat nu eigenlijk een verzameling is. Vormen alle ordinaalgetallen een verzameling? En zo niet, is dat dan een gelegenheidsverbod, of een staaltje van inzicht? Misschien zult U zeggen: 'zulke grote verzamelingen zijn pathologisch. In het kleine weet ik precies wat een verzameling is'. Van dat geval heb ik hier een simpel vraagje: is er een verzameling van reële getallen die niet aftelbaar en niet gelijkmachtig met ℝ is?

B: Daar vlieg ik niet in. Ik ga de continuumhypothese[12] niet even tussen Rotterdam en Brussel oplossen. Trouwens, wat hebt U voor met die vraag?

I: Ik wil U laten zien dat U kennelijk toch niet zo goed kunt overzien wat voor verzamelingen kunnen optreden. M.a.w. zo simpel zijn die dingen toch ook weer niet. Laat ik mijn kandidaat voorstellen: **het begrip natuurlijk getal is primitief.** Meteen maar even de argumenten:
1 Het begrip is uiterst eenvoudig.
2 We kennen ze allemaal.

Wat 1 betreft, men construeert natuurlijke getallen stapsgewijs uit gedachteneenheden of uit konkrete tekens (streepjes bij voorbeeld) op papier. Een kind

kan dat doen. Uit de ontstaanswijze van de natuurlijke getallen volgt dat we een algorithme hebben om ze een voor een op te sommen. Een beetje idealisering komt hier wel bij kijken, in de praktijk zullen we 10^{10} wel niet halen. Daarenboven weten we ook meer van ℕ, de verzameling der natuurlijke getallen. Een vraag als 'is er een getal tussen *m* en *n*' (analoog aan de continuum hypothese) kunnen we met een beetje rekenen eenvoudig beantwoorden.

B: Alle voordelen ten spijt is ℕ, als structuur, ingewikkelder dan een verzameling. Behalve de verzameling der getallen, is er ook nog een operatie: de opvolger.

I: Die operatie is er juist om de verzameling te genereren. Bovendien helpt die extra structuur om ℕ overzichtelijker te maken. Waarom denkt U dat Cantor zo graag ℝ wou welordenen, toch niet om ℝ onoverzichtelijker te maken?

H: Laten we de zaak nu eens van het standpunt van de didactiek bekijken. Worden natuurlijke getallen niet juist geïntroduceerd door verzamelingen te vergelijken. Kortom door kardinaalgetallen à la Frege in te voeren?

I: Dat is een moeilijke vraag. Men kan getallen het jonge kind natuurlijk aanpraten via gelijkmachtigheid. Erg ver kom je dan natuurlijk niet. Ik zou er niet aan moeten denken een grote cirkel te moeten zien met 121 lieve eendjes. Een andere, m.i. meer natuurlijke, methode is het aanleren van onze getallen door aftelversjes, rijmpjes. Of door het uit het hoofd leren van de bekende rij een, twee, drie, vier, vijf, . . . al of niet met gebruik van vingers[13]. En laten we alstublieft geen filosoofje gaan spelen door over objecten en hun namen te gaan doorzagen. Geen kind is gediend met dergelijke spitsvondigheden. Trouwens, U kent die eersteklas-opgaven waarschijnlijk wel waar kinderen streepjes moeten trekken tussen een cirkel met appels en een cirkel met poesjes. Is het U opgevallen dat die streepjes in een volgorde getrokken worden? M.a.w. het rang idee steekt overal toch weer de kop op. Alleen in educatieve films ziet men, o zo mooi, alle streepjes tegelijk groeien.

H: Bent U soms tegen verzamelingen? Wat blijft er dan van de New Math over?

I: Helemaal niet. Verzamelingen zijn leuk speelgoed, en ze kunnen in bepaalde situaties heel verhelderend werken. Waar ik tegen ben is de huidige verzamelingsziekte die het onderwijs aangetast heeft. In de boeken van mijn kinderen zie ik bij voorbeeld dat schrijvers verzamelingen invoeren en *er dan helemaal niets mee doen*! Dat is niet zo'n wonder want zinvolle toepassingen liggen niet voor het opscheppen. Maar het is tekenend dat respectabele auteurs meedansen om het gouden verzamelingskalf, wat moet de argeloze leraar dan wel denken? Om U een voorbeeld te geven: vroeger hadden vergelijkingen wortels, tegenwoordig hebben ze oplossingsverzamelingen. Uit het schrift van mijn dochtertje leerde ik de praktijk kennen. Hoe luidt de oplossing van $2x+7 = 13$? Antwoord: $x = \{3\}$. Geen grapje. Instructies van de leraar.

B: Dat is geen sterk argument. Je kunt de verzamelingen niet uit het onderwijs weren omdat toevallig één leraar de zaak niet begrijpt.

I: Accoord, maar ik wil wel verder gaan. Zelfs al zou het antwoord geweest zijn $x \in \{3\}$ of $OV = \{3\}$, dan nòg is er sprake van irrelevante dikdoenerij. Het antwoord '$x = 3$' geeft precies dezelfde informatie en is veel directer. Vergelijk de volgende zinnen: 'De oplossingen van de vergelijking zijn -5, 7, 12' en 'De oplossingsverzameling van de vergelijking is $\{-5, 7, 12\}$'. Is er iets wat de tweede zin ons leert, wat niet in de eerste staat? Misschien dat er een verzameling is die precies -5, 7 en 12 bevat? Daar twijfelt toch niemand aan? Ik blijf erbij: op elementair niveau maakt een verzamelingsterminologie de zaak alleen maar ondoorzichtiger. Ook in de wiskunde geldt: eenvoud is het kenmerk van het ware.
Nogmaals: de harde kern van de wiskunde en van het wiskundeonderwijs bestaan niet uit verzamelingen, maar uit getalsystemen; vergelijkingen, functies, limieten, differentieëren enz. Verzamelingen zijn op een elementair niveau, een soort intellectuele luxe.

B: Maar vindt U dan niet dat verzamelingen noodzakelijk zijn om vectorruimte, groepen en wat dies meer zij te behandelen?

I: Ja en nee. Om te beginnen vind ik dat bij voorbeeld vectorruimten niet per axiomasysteem uit de lucht moeten komen vallen. De natuurlijke manier is nog steeds om vectoren en vectorruimten aan de hand van de voorbeelden van het euclidische plattevlak en de euclidische ruimte in te voeren.
Welnu, men kan zelfs in die eenvoudige ruimte al 'coördinaat vrij' werken, het is zelfs veel inzichtelijker. Het zwaartepunt van een viervlak met een hoekpunt in de oorsprong en de andere hoekpunten in $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ berekent men gemakkelijker door *niet* naar de coördinaten te kijken en het antwoord $\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ laat prachtig de rol van de hoekpunten zien. Wanneer men nu voor, zeg de euclidische ruimte, de grondeigenschappen (dat zijn de toekomstige axioma's) geïsoleerd heeft, dan kan men de leerling laten werken alsof hij met axioma's te doen heeft.
De stap van een voorbeeld naar het algemene begrip is daardoor voorbereid. Men moet er rekening mee houden dat deze stap toch nog wat conceptuele moeilijkheden geeft, zodat bij voorbeeld een tussenstapje naar zoiets als een functieruimte wel de moeite waard is. Gezien het algemene verschijnsel van tijdgebrek in schoolprogramma's is het later invoeren van axioma's nog zo gek niet. Is er geen tijd meer, dan heeft de leerling in concreto alles al gezien. Beter een half ei, dan een lege dop!
Met groepen ligt de zaak precies zo, zij het dan dat in ons Hollandse systeem groepen een duidelijke luxe vormen.

B: Ik wil nog één poging wagen om de moderne wiskunde te redden. Is niet juist de karakteristiek van de wiskunde dat zij zekere uitspraken doet over abstracte zaken waar we niets van weten. De verzamelingsleer past juist mooi in die opvatting.

I: De opvatting wordt wel meer verdedigd. Persoonlijk vind ik het een kolosale sick joke, het is je reinste vervalsing van de wiskunde. Wiskundigen weten wis en waarempel wel welke objecten de kern van de wiskunde uitmaken. Namelijk doodgewone dingen als natuurlijke getallen, complexe getallen enz. De wiskunde voor te stellen als een axiomatische theorie, of als een stel axiomatische

theorieën, is een 1 aprilgrap van formaat. Het zal iedereen duidelijk zijn dat je eerst konkrete dingen moet hebben en bestuderen voordat je een axiomatische theorie kunt opzetten. Er is onder wiskundigen wel degelijk een grote overeenstemming over de vraag welke theorieën fundamenteel zijn en welke niet. Dat weerlegt al min of meer het standpunt dat de wiskunde niet zou weten waarover ze praat. Er zijn namelijk oneindig veel theorieën en zou de wiskundige naar willekeur een theorie prikken, dan zou het wel erg moeilijk te verklaren zijn waarom een heel groot deel van de axiomatische literatuur zich bezighoudt met de theorieën van groepen, ringen, lichamen, modulen, vectorruimte.
Ik hoop dat U uit mijn woorden niet afleidt dat ik een tegenstander van axiomatisering ben. De voordelen van axiomatisering zijn zo bekend dat ik er niets over hoef te zeggen. Ik wil alleen maar met nadruk zeggen dat de door de heer B geciteerde opvatting een soort goedkope diepzinnigheid heeft die past bij een laat uur, een goed glas bier en een welwillend gehoor, maar die weinig van doen heeft met de grondslagen van de wiskunde. Maar nu genoeg over dit punt. Waar zijn we nu?
B: Hier zijn we in Brussel, zouden we nog Belgische collega's zien?

H: Ja, daar zie ik mijn vriend R. al.

Entree R.

R: Gegroet heren, op weg naar hetzelfde doel, denk ik?

H: Zeker, doe je jas uit en doe mee aan ons opinie-onderzoek.

R: Zolang het geen sensitivity training is, stel ik mij beschikbaar.

B: Niemand is aardig tegen mijn verzamelingen, wil jij niet een goed woordje voor ze doen?

R: Zeker wel, we zijn allemaal verzamelingen en men moet zijn medeschepselen eren.

B: Geen antropologie hier, verzamelingenleer is zo al moeilijk genoeg.

R: Goed dan, ik zal je een van mijn stokpaardjes demonstreren: Een functie is géén verzameling maar een voorschrift.

H: Waar heb ik dat eerder gehoord? Heb je een visioen gehad?

R: Helemaal niet, ik ben aan het programmeren. En daardoor is mij een licht opgegaan: een functie is een programma!

B: Dit is onhoudbaar, wat dacht je van de functie die aan iedere deelverzameling van $\mathbb{N}$ zijn machtsverzameling toevoegt? Die wil ik jou wel eens zien programmeren.

R: Je moet nog leren mijn woorden op hun waarde te schatten. In de eerste plaats bedoel ik niet alle functies en in de tweede plaats ben ik alleen maar extremistisch om iets tegenover het verzamelingssyndroom te stellen. Laat mij precies zeggen wat ik bedoel.

H&B: Hè ja.

R: Luister dan vrienden, wat jullie een functie noemen is de *extensie* van mijn functie. Wat ik de *grafiek* zou noemen. Jullie hebben mijn functie uitgekleed en alleen z'n geraamte laten staan en nu beweren jullie dat dat juist goed is want, zeggen jullie, de extensie is het enige waar het om gaat.
Wie ooit geprogrammeerd heeft weet dat de extensie niet veel waard is, de kunst is juist om een programma te vinden dat die extensie oplevert.

H: Precies mijn standpunt.

R: Mijn begrip functie zou ik *intensioneel* willen noemen. Het gaat om de manier waarop de functie gegeven wordt.
In de praktijk van de numerieke wiskunde is die intensie erg belangrijk. Wie een slecht programma schrijft (d.w.z. wie veel rekentijd nodig heeft of veel geheugenruimte) is duurder uit. Er zijn dus kennelijk slechte en goede programma's, hoewel ze precies dezelfde extensie hebben. Even een gemakkelijk voorbeeld. Beschouw de functies f en g, gegeven door

$$f(x) = (x+1)^3, \; g(x) = x^3+3x^2+3x+1$$

Wie letterlijk $f(5)$ en $g(5)$ uitrekent zal zien dat g méér rekenstappen vraagt. Moraal: in 'rekenopzicht' is f beter dan g.

B: Uit je laatste zin kan ik een paradox halen. Kijk maar:

$$\frac{\begin{array}{c} f \text{ is beter dan } g \\ f = g \end{array}}{f \text{ is beter dan } f}$$

R: Dit lijkt erger dan het is. Omdat f en g intensionele objecten zijn moet je ook de *intensionele gelijkheidsrelatie* gebruiken. Als we die aangeven met drie streepjes, dan geldt $f \not\equiv g$, want f en g zijn intensioneel verschillend gegegeven. De paradox gaat dus niet door.

H: Ik ben blij met je voorbeelden. Ze laten zien dat intensionele objecten en intensionele relaties relevant zijn voor de moderne verzamelingsleer, die nivelleert wel erg sterk. In onze eeuw heeft de verzamelingsleer wel een stuk wiskundige hygiëne gebracht door allerlei verborgen veronderstellingen zichtbaar te maken en door onnodige begrippen te elimineren. Maar als we 'nodig en onnodig' niet in de juiste context zien, dan is er een goede kans dat het kind het badwater achterna gaat. We mogen van geluk spreken dat er nog mensen waren die het oude functiebegrip nog onthouden hadden.
Gelukkig dat de wiskunde niet totalitair geregeerd wordt. Ik moet er niet aan denken: wiskundigen die elkaar toefluisteren 'en toch is het geen verzameling'. Eigenlijk is de traditie niet in gevaar geweest, de intuïtionisten hebben altijd al functies intensioneel opgevat, zeker hun theorie van keuzerijen heeft sterk intensionele aspecten. Daarnaast heeft men in de recursietheorie eigenlijk niets anders gedaan dan intensie tegen extensie uitspelen. Ook de λ-calculus heeft sterk intensionele trekken.

R: De triomfen van de extensionalisering zijn toch aanzienlijk. Van Cantor tot Bourbaki is er een consequente eliminering van intensionele zaken. Denk

alleen maar aan de algoritmen. De wiskundige traditie van vóór 1900 (zelfs 1950) was sterk algoritmisch georiënteerd. Om maar een paar dingen te noemen: het algoritme van Euclides, het theorema van Sturm, het rekenschema van Horner, de regel van Cramer, de hele determinantenwinkel. Dankzij de computertoepassingen stijgt de belangstelling voor algoritmen weer. Daarnaast hebben de abstracte talen en de logica een eigen traditie van algoritmiek ontwikkeld. Het lijkt mij niet onwaarschijnlijk dat de computertoepassingen op den duur hele andere eisen aan de wiskunde-opleiding gaan stellen dan de abstracte New Math, anders gezegd, dat er een Newer Math te wachten staat die meer nadruk zal leggen op wat concrete zaken zoals Rekenkunde, Kombinatoriek, Algoritmiek. Het zou goed zijn om daar alvast eens over na te denken.

B: Jammer, ik was juist zo'n beetje gewend aan de huidige mode.

Hier brak het gesprek af omdat de trein het station van Mons binnenreed.

Toen ik de volgende morgen de zaal betrad, waar het congres dat mijn reisdoel was, gehouden werd, was de eerste spreker al begonnen. Ik ving nog juist een brok van zijn eerste zin op '. . . Utrecht naar Mons kwam ik na het overstappen in . . .'.

Noten

0 Een vrije bewerking van voordrachten gehouden in Mons en Hannover in het najaar van 1973.

1 G. K. van het Reve, Op weg naar het einde, blz. 7, Amsterdam, 1963.

2 In deze passage worden axioma's betreffende de fundamentele wiskundige objecten en fundamentele wiskundige eigenschappen bedoeld. Het heeft bij voorbeeld geen zin om te zeggen dat de lichaamsaxioma's waar zijn: Axioma's van speciale theorieën leggen a.h.w. spelregels vast die men binnen die theorieën moet gehoorzamen, zij zijn (per definitie) waar in de modellen van de theorie. De axioma's waarover men van mening kan verschillen betreffen de wiskundige 'werkelijkheid'; het keuzeaxioma is een voorbeeld, het oneindigheidsaxioma (d.i. 'Er is een oneindige verzameling') is een tweede.

3 Met logica wordt in dit artikel steeds (al of niet geformaliseerde) wiskundige logica bedoeld. In die zin is ook 'logisch' te verstaan.

4 Zie A. Heyting, Intuitionism Ch. VII, Amsterdam, 1956.

5 Zie D. van Dalen, Formele Logica, §9, §21, Utrecht 1971.

6 In de logica praat men over het formele systeem met zijn formele taal in een andere taal, de z.g. metataal (doorgaans de omgangstaal). In die laatste taal kan men ook eigenschappen van het formele systeem vaststellen, maar dan met informele middelen. Voor bewijstheoretische doeleinden formaliseert men de metataal ook wel eens, maar dat is duidelijk een kunstgreep.

7 'klassieke' slaat op de klassieke, tweewaardige logica, bekend van de waarheidstafels.

8 De stelling van Lydon zie C. C. Chang, J. Keisler, Model Theory, Amsterdam 1973, blz. 126, Theorem 3.2.4.

9 Dit is de ontkenning van de these van het Logicisme: Wiskunde is Logica. Een these die allang onhoudbaar gebleken is. Zie S. Körner, The Philosophy of Mathematics, 1960, Harper Torch books.

10 Het is een algemeen verbreid, populair misverstand dat Hilbert – de stichter van de formalistische school – de wiskunde opvatte als een formeel spelletje met symbolen. Voor hem bestond de

concrete, werkelijke wiskunde uit combinatorische manipulaties met concrete objecten – de z.g. finitistische wiskunde. Daaraan werd toegevoegd de 'ideale wiskunde' der formele systemen, die echter door de finitistische wiskunde gerechtvaardigd moest worden. (Hilbert gebruikte ter illustratie het beeld van de oneindige punten van het euclidische vlak).
Het extreme formalistische standpunt stamt van latere wiskundigen (b.v. H. B. Curry – Outlines of a formalist philosophy of mathematics, Amsterdam 1951). Zie verder S. Körner, loc. cit.

11 Het scheermes van Ockham is een methodologisch principe dat voorschrift niet meer begrippen aan te nemen dan strikt noodzakelijk is.

12 Zie D. van Dalen, A. F. Monna, Sets and Integration, An outline of the development, Groningen 1972, blz. 11.

13 Na de voltooiing van het manuscript werd mijn aandacht gevestigd op het boek *Mathematics as an educational task*, van H. Freudenthal, Dordrecht, 1973, waar uitvoerig ingegaan wordt op de invoering der getallen. Men raadplege ook m.b.t. de opmerkingen over verzamelingen en functies Freudenthal's boek.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.

Het derde internationale congres over wiskundeonderwijs.
Dit congres zal van 16–21 augustus 1976 gehouden worden in Karlsruhe.
Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren is voornemens, zoals voor het congres in 1972 te Exeter, uit de kas van de vereniging een tegemoetkoming in de kosten te geven voor die leden die het congres willen bijwonen.
Hen die voor een toelage in aanmerking willen komen wordt verzocht dit vóór 1 maart bij de secretaris kenbaar te maken. De grootte van de tegemoetkoming is afhankelijk van het aantal aanvragen.
De congreskosten bedragen DM. 100.
Om de reeds verschenen eerste aankondiging van het congres te ontvangen kan men zich richten tot:
3rd International Congress on Mathematical Education
University
D 75 Karlsruhe (FRG).

200-jarig bestaan Wiskundig Genootschap

Een commissie van voorbereiding voor de viering van dit jubileum bestaande uit Prof. dr. P. C. Baayen, prof. dr. F. van der Blij, dr. A. W. Grootendorst, prof. dr. A. F. Monna en prof. dr. A. C. Zaanen, overweegt onder andere de inrichting van een tentoonstelling over de ontwikkeling van de wiskunde in Nederland in deze periode.
Daarbij wordt gedacht aan een expositie van school-, leer- en studieboeken in Nederland uitgegeven. Ook proefschriften, oraties en ev. portretten van wiskundigen kunnen in de expositie opgenomen worden.
De commissie denkt zowel aan leerboeken gebruikt op Gymnasium (H.B.S.), Universiteit, K.M.A. als ook op zeevaartscholen, dienst van de accijnsen, nijverheidsscholen e.d.
Om een eerste inventarisatie te maken doet de commissie een beroep op U, zo U (school) boeken, geschriften, ev. handschriften over wiskunde van vóór 1925 in uw bezit heeft, dit met opgave van schrijver en titel te willen melden aan de secretaris van de commissie prof. dr. P. C. Baayen, p/a. Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam.
De commissie stelt zich voor te proberen tot een zinvolle selectie te komen en zal eventueel in een later stadium een verzoek tot U kunnen richten om deze boeken tijdelijk voor de bedoelde expositie (en het vervaardigen van een beredeneerde catalogus) ter beschikking te stellen.
Mogen wij U nu reeds hartelijk danken voor Uw medewerking in deze. Natuurlijk zijn alle suggesties over de inrichting van zo'n expositie eveneens welkom.

A. F. Monna.

1874–1974
Een herinnering aan het werk van Jan Versluys

DR. JOH. H. WANSINK

Arnhem

1 Honderd jaar geleden verscheen bij Noordhoff in Groningen van de hand van de Nederlandse wiskundige Jan Versluys diens 'Methoden bij het onderwijs in de wiskunde en bij de wetenschappelijke behandeling van dat vak'. In zekere zin een eersteling op didactisch gebied, want Jacob de Gelder's 'Over de methodus docendi in de wiskundige wetenschappen te volgen' van 1826 was geen zelfstandige uitgave, maar slechts een hoofdstuk in een uitvoeriger publicatie.
Hoewel het boek van Versluys de indruk maakt van een nog wat rommelige compilatie van destijds gangbare opvattingen, lijkt het me toch verantwoord er hier enige aandacht voor te vragen in verband met de betekenis die Versluys' totale oeuvre voor ons Nederlandse onderwijs ongetwijfeld heeft gehad. En in verband met de omstandigheid dat nu, een eeuw later, in 1973 en in 1974, er boeken op de markt komen die aan de Nederlandse wiskundedocenten een informatie op didactisch gebied verschaffen die ze in het verleden zolang hebben moeten ontberen.
Ik noem hier in de eerste plaats de in de Academische Paperbacks opgenomen 'Didactiek van de wiskunde' van J. van Dormolen (Utrecht 1974) en daarnaast de in 1973 en 1974 verschenen werken van Van Hiele en Freudenthal. Van de laatste zijn 'Mathematik als pädagogische Aufgabe' (Ernst Klett Verlag, Stuttgart), van de eerste zijn als werkboek aangekondigde bundel 'Begrip en inzicht' (Muusses, Purmerend). Geen van deze beide auteurs wenst echter nog zijn werk als een wiskundige didactiek te bestempelen, zoals Van Dormolen wèl doet.
Vergelijking van het recente werk van de drie hier genoemde auteurs met dat van Versluys uit 1874 doet ons beseffen, dat men voor de wezenlijke onderwijsproblemen destijds nog nauwelijks oog heeft gehad. De algemeen gehuldigde, starre opvattingen van destijds waren oorzaak dat aan de problemen van de doelstellingen, de leerstofanalyse en de werkvormen nog maar in zeer beperkte mate aandacht kon worden besteed. Aan een werkelijke analyse van de didactische problematiek was men destijds nog niet toe. De leerpsychologie stond nog in zijn Herbartiaanse kinderschoenen, op de vragen wat men diende te onderwijzen, waartoe en op welke wijze, konden naar hedendaagse maatstaven beoordeeld nog slechts onbevredigende antwoorden worden gegeven.

2 Jan Versluys (1845–1920)[1] is ongeveer een halve eeuw lang in ons land een gezaghebbende persoonlijkheid geweest met intense belangstelling voor alle

onderwijsproblemen van zijn tijd. Zijn invloed op het lager en het voortgezet onderwijs van zijn tijd was groot.
Hij werd in 1845 te Oostburg in Zeeuwsch-Vlaandere geboren[2], was na zijn studie voor onderwijzer enige tijd werkzaam aan een lagere school te Hoofddorp en werd daarna leraar wiskunde aan de rijkshogereburgerschool te Groningen. Later werd hij leraar beschrijvende meetkunde en perspectief aan de scholen voor tekenleraren en voor kunstnijverheid in het rijksmuseum te Amsterdam. Als voorzitter van het Wiskundig Genootschap heeft hij aandeel gehad in de totstandkoming van de 'Revue semestrielle des publications mathématiques'. Naast zijn talrijke schoolboeken verscheen er een achttal wetenschappelijke publicaties van zijn hand, terwijl vijf keer een antwoord van hem op een prijsvraag uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap voor bekroning in aanmerking kwam. Hij nam actief deel aan het verenigingsleven op onderwijsgebied en heeft enige tijd het voorzitterschap bekleed van de Vereniging van Leraren en van de Vereniging voor de Paedagogiek, van welke vereniging hij later ere-voorzitter werd. Hij heeft deel uitgemaakt van de examencommissie voor de middelbare akten wiskunde. Op 75-jarige leeftijd overleed hij in Zwitserland.
Als auteur van schoolboeken bleek hij buitengewoon produktief. Na zijn dood werden alle werken van zijn hand door zijn zoon A. Versluys aan P. Noordhoff overgedragen. Wijdenes schreef naar aanleiding van deze overdracht een brochure waarin meer dan 90 titels konden worden opgesomd. Wijdenes wees erop, dat in de periode 1880–1905 zijn schoolboeken een ruimer debiet vonden dan die van enig ander auteur, niet alleen ten aanzien van het onderwijs op hogereburgerschool en gymnasium, maar evenzeer voor dat aan kweek- en normaalscholen. Naast zijn boeken verwierven in de genoemde jaren in het bijzonder ook die van Knapper, van Smits, van Ninck Blok en van Wisselink een uitstekende reputatie[3].
In de lijst van 1920 treffen we titels aan op de volgende deelgebieden: analytische meetkunde, driehoeksmeting, perspectief en beschrijvende meetkunde, stereometrie, vlakke meetkunde, tafels, rekenkunde, vormleer en meetkundig tekenen, maar ook een beknopte geschiedenis van de wiskunde, handleidingen voor het rekenonderwijs, voor het schrijfonderwijs en voor het tekenonderwijs, werken over de geschiedenis van opvoeding en onderwijs en een boek over het stelsel van J. F. Herbart, terwijl Versluys ook nog als redacteur is opgetreden van een 'Paedagogische Bibliotheek', waarin 18 deeltjes zijn verschenen. Herdrukken van schoolboeken werden na zijn dood door Wijdenes, door Schogt, door dr. Postma verzorgd en blijven verschijnen tot na de tweede wereldoorlog.
3 Beschouwen we de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in ons land gedurende de 19e en de 20e eeuw globaal, zoals deze zich laat opmaken uit de in gebruik zijnde leerboeken, dan lijkt het me zinvol daarbij een viertal perioden te onderscheiden:
(1) de periode vóór de totstandkoming van de hbs waarin de leerboeken van Jacob de Gelder de markt voor de latijnse scholen en de diverse instituten beheersten;
(2) en (3) het tijdvak van de hogereburgerschool, in de eerste helft waarvan Jan Versluys de meest gezaghebbende auteur bleek naast o.a. W. H. Wisselink,

terwijl in de tweede helft vooral P. Wijdenes naar voren trad met in latere jaren vooral C. J. Alders als concurrent;
(4) de laatste vier decennia van de eeuw waarin door de reorganisaties van de zestiger jaren voor alle wiskundevakken nieuwe leerboeken noodzakelijk bleken, boeken die niet langer door één enkele auteur zouden worden geschreven zoals voorheen lang usance geweest was, maar door een dikwijls uitgebreid team van auteurs; voor de ontwikkeling van de didactiek en daarmee van de leerboeken zijn in deze periode allereerst de opvattingen van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en van de activiteiten van het I.O.W.O. te Utrecht, het Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskundeonderwijs van doorslaggevende betekenis.
Met het noemen van enige namen bedoel ik in het bovenstaande geenszins te suggereren, dat commercieel succes ook superieure didactisch-methodische kwaliteit zou garanderen.

4 Voor iedere wiskundeleraar met belangstelling voor de historische ontwikkeling van zijn vak heeft het werk van Versluys uit 1874 ook nu nog enige betekenis. Er wordt in 'getracht de voornaamste zaken waarop men bij het onderwijs heeft te letten, kort en duidelijk uiteen te zetten' en voor fouten die in het onderwijs gemaakt worden te waarschuwen. De auteur heeft 'bij het schrijven . . . het oog gericht op hen die examen in de wiskunde willen doen, of die met het onderwijs in dat vak zijn belast'. Een en ander betekent, dat hij de belangen voor ogen heeft gehad van hen die zich wilden voorbereiden voor de zogenaamde akte Q, waarvoor de wetgever van 1863 eisen had gesteld inzake de kennis van de theorie van onderwijs en opvoeding. Het fiasco van deze akte Q die in de praktijk een wassen neus bleek en eerst in de vijftiger jaren van de twintigste eeuw door een betere regeling zou worden vervangen, kan men beschouwen als de voornaamste oorzaak van het geringe succes dat Versluys met zijn 'Methoden' heeft gehad; het boek werd slechts eenmaal herdrukt, in 1885. En dat terwijl er geen concurrerende uitgaven op de markt waren! De auteur heeft in 182 bladzijden een vijftigtal onderwerpen behandeld, waaruit we reeds zien dat nergens diep op de materie kon worden ingegaan. Ik noem enkele titels:
deductie en inductie, analytische en synthetische methode in de wiskunde, dogmatisch en heuristisch, akroamatische (mededelende) leervorm, het onderwijs moet aanschouwelijk zijn, het van buiten leren, hoe een wiskunde-les ingericht moet zijn, het begrip getal, omvang van het onderwijs in wiskunde in verband met de vormende waarde, repeteren.
Versluys pleit voor een aanschouwelijke inleiding tot de vlakke meetkunde en een aanschouwelijke behandeling van de gehele stereometrie, acht rekenkunde en algebra geschikt voor heuristische behandeling, wenst in verband met het onderwijs in kansrekening en waarschijnlijkheidsrekening combinaties en permutaties met toepassingen op de binomiaalformule in het leerplan opgenomen te zien, houdt een pleidooi voor behandeling van de complexe getallen en is van oordeel dat alle categorieën van leerlingen (ook die we later tot de A-leerlingen zouden gaan rekenen) de wiskunde nodig hebben.
Hij wijst erop, dat de eindexameneis van 1870 dat de kandidaten een duidelijk begrip dienen te hebben van een wiskundig betoog en van het onderling ver-

band van de diverse leerstukken evenzeer dient te gelden voor rekenkunde en algebra als voor de meetkunde.

5 Ter kenschetsing van het karakter van het boek laten we hier de hoofdzaken uit het hoofdstuk 'Geschiedenis der heuristische methode in ons land' (p. 49–52) volgen.

'Als ik mij niet vergis', aldus Versluys, 'was Van Swinden de eerste die in ons land erop aandrong om bij het wiskundig onderwijs de zelfwerkzaamheid van de leerling in aanspraak te nemen'.
Versluys ontleent daarna aan de voorrede van Van Swinden's in 1790 verschenen 'Grondbeginsels der Meetkunde'[4] onder meer: '. . . men kan de leerlingen niet genoeg aanzetten om zelve te werken, zelve iets op te stellen: bij gebrek aan die voorzorg worden niet zelden de geesten gedoofd of tenminste trager dan zij anders zouden geweest zijn. Hierom heb ik de Werkstukken van de Voorstellen, dat is het werkdadige van het beschouwende gedeelte afgezonderd, en achter ieder Voorstel aangestipt, welk Werkstuk men alsdan in staat is op te lossen. Ik laat dan die Werkstukken door de jonge lieden zelve oplossen en bewijzen, en besteed eenen dag der week om hunne oplossingen na te zien. Ik heb mij uitnemend wel bij die handelwijze bevonden, en mij meer dan eens verwonderd over de vaardigheid die de leerlingen in korten tijd in dit stuk krijgen'.

Versluys vervolgt:
In 1826 verscheen de 'Verhandeling over het verband en den samenhang der natuurlijke en zedelijke wetenschappen, en over de wijze om zich dezelve eigen te maken en aan anderen mede te delen. Door Jacob de Gelder, Hoogleeraar te Leiden'.[5] In het vijfde hoofdstuk van dat werk 'Over de methodus docendi, in de studie der wiskundige wetenschappen te volgen', zet de schrijver zijn denkbeelden over de methode van onderwijs uiteen. Hij noemt zijn leerwijze sokratisch en past haar toe op een aantal voorbeelden. Het blijkt daaruit dat De Gelder een belangrijke schrede voorwaarts heeft gedaan op de weg naar een betere methode.
Zijn gehele onderwijs is een aaneenschakeling van vragen. Enige vraagstukken lost hij zuiver heuristisch op. Bij het bewijzen van eigenschappen zet hij gewoonlijk de stelling voorop. Hij laat haar lezen uit het leerboek, zoekt vervolgens al vragende met de leerlingen de bestanddelen van de eigenschap op en gaat daarna over tot het bewijs, dat ook al vragende wordt behandeld zonder daarbij het boek te hulp te nemen. De Gelder richt echter zijn vragen zo in dat de leerling in veel gevallen slechts behoeft te bevestigen wat de onderwijzer heeft gezegd. Zo leest men als vermoedelijke antwoorden van de leerling: (1) dit is duidelijk; (2) dit is zonder twijfel; (3) dit zie ik zeer duidelijk; (4) o ja, dat blijkt mij nu duidelijk; (5) ik zie de algemeenheid daarvan volkomen in. Hierdoor wordt de handelwijze gekenschetst als sokratisch, in historische zin opgevat.

Uit dezelfde verhandeling leren wij dat de definities zorgvuldig van alle kanten bezien moeten worden, dat het onderwijs op aanschouwing moet berusten en dat daarom het wetenschappelijk onderwijs in de meetkunde moet

voorafgegaan worden door het rechtlijnig tekenen. Met nadruk dringt de schrijver erop aan, dat sokratisch onderwijs niet mogelijk is, als de leraar het onderwerp niet vooraf van alle kanten heeft bezien. Zowel in de 'Verhandeling' als in zijn leerboeken dringt hij aan op logische gestrengheid, ten aanzien waarvan hij bittere verwijten richt tot andere schrijvers.

In 1846 verklaarde De Gelder, dat er reeds veel verbeterd was, maar het schijnt, dat er na die tijd weinig vooruitgang plaats gevonden heeft. De werken van De Gelder zijn verdrongen door andere van veel geringer gehalte, die van Badhon Ghyben, Strootman en Kempees. Dat was een groot nadeel. Nog groter schade was het, dät de wijze waarop toelatingsexamens voor de Militaire Akademie en voor het Instituut te Medenblik werd afgenomen, er aanleiding toe gaven dat op een aantal inrichtingen de leerstof letterlijk werd *ingepompt*. De hoogst nuttige wenken door De Gelder gegeven schijnen geheel in vergetelheid te zijn geraakt.

Aan enkele waarschuwende stemmen heeft het niet ontbroken! Met nadruk liet zich in 1849 Dr. Stein Parvé[6] horen die op een goede methode aandrong en daarbij op het standpunt van De Gelder stond.

Men leide uit het voorgaande niet af dat ik de werken van De Gelder nu nog algemeen in gebruik zou wensen. Op dat gebied is er geen stilstand geweest. Maar die werken zijn beter dan de Breda'se leerboeken[7] die nu zo druk gebruikt worden ook bij het middelbaar onderwijs. Het laatste heeft zeker op het wiskundig onderwijs in ons land nu reeds een heilzame invloed uitgeoefend[8]. Maar de zoeven genoemde omstandigheid werpt toch een treurig licht op het gehalte van een aantal leraren. Het verschijnsel moet daaruit verklaard worden dat velen zo sleurziek zijn, dat zij niet kunnen afwijken van wat zij eenmaal gewoon zijn en te lui om met iets nieuws kennis te maken.
Als overgangsmaatregel heeft men natuurlijk hier en daar personen moeten benoemen die beter als boekhouder dienst hadden kunnen doen dan als leraar; en wij zullen dus het oog op de toekomst richten. Veel zal in dit opzicht afhangen van de examens voor het Middelbaar Onderwijs. Maar men heeft daarbij tot nu toe ten onrechte gemeend dat iemand genoeg blijken van pedagogische bekwaamheid geeft, als hij opgegeven stellingen vloeiend kan bewijzen en ook een enkele maal als hij een geheel hoofdstuk goed kan *voordragen*.

Tot zover het hoofdstuk uit de 'Methoden' van Versluys.

Noten

1 In Euclides 49, p. 361, regel 1, staat abusievelijk als geboortejaar van Versluys 1843 opgegeven in plaats van 1845.

2 De biografische gegevens van J. Versluys zijn ontleend aan een *In Memoriam*, opgenomen in de 17e jaargang van het onder redactie van F. J. Vaes staande Wiskundig Tijdschrift.
In het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en in Euclides heb ik over Versluys' leven en werken nimmer mededelingen aangetroffen.

3 Enige gegevens over de door Vaes vermelde auteurs:
C. Knapper, Kzn, schreef in 1879 en 1891 zijn beide delen van het Leerboek der meetkunde, planimetrie en stereometrie;
G. Smits schreef een serie schoolboeken, later herzien door Visser en door De Van die tot diep in de 20ste eeuw werden gebruikt, een Leerboek der vlakke meetkunde, Verzamelingen van meetkundige vraagstukken en verzamelingen van algebraïsche vraagstukken; de oudste van 1885;
Dr. C. J. J. Ninck Blok bewerkte in 1877 en volgende jaren Lübsen's Mathematische Werke; ze werden uitgegeven in een serie van zes delen;
Diverse Wisselinks zijn bekend als auteurs van schoolboeken voor wiskunde; Vaes zal W. H. Wisselink bedoeld hebben die o.a. een Kern der Algebra (1889), een Kern der Meetkunde (1897), een Kern der Rekenkunde (1886) en een Kern der Vlakke driehoeksmeting heeft geschreven, boekjes die later in het Noordhoff-fonds terecht kwamen en o.a. door Wijdenes herzien tot na de eerste wereldoorlog veel gebruikt werden.

4 J. H. van Swinden (1746–1823) was hoogleraar in Franeker en in Leiden en in Nederland tevens bekend doordat hij deel heeft genomen aan de voorbereiding van de invoering van het metriek stelsel. Zijn befaamde 'Grondbeginsels der Meetkunde' werden in 1786 aanvankelijk in het Latijn geschreven. In 1790 volgde de Nederlandse uitgave die in 1816 werd herdrukt en in 1834 een Duitse vertaling beleefde.

5 Jacob de Gelder (1765–1848) was hoogleraar te Leiden. Hij schreef tal van werken voor universiteit en Latijnse school. Het meest bekend zijn de 'Beginselen der meetkunde, geschreven naar hare tegenwoordige staat van vorderingen', een tweedelig werk, en zijn 'Beginselen der stelkunst, ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vordering en beschaving, ten gebruike bij deszelfs openbare en bijzondere lessen, opgesteld door Jacob de Gelder', de stelkunst van 1810, de meetkunst in derde druk van 1828 en 1829.
Voor ons schoolonderwijs zijn echter belangrijker zijn 'Allereerste gronden der meetkunst' en zijn 'Allereerste gronden der stelkunst' voor het onderwijs aan de Latijnse school. Over het meetkundeboekje vindt men uitvoerige informatie in het Gedenkboek van de Nederlandse Gymnasiën, 1830–1930, op p. 227 e.v.
Karakteristiek voor de hulp door De Gelder aan de wiskunde-onderwijzer van zijn tijd verleend zijn de 'Uitgewerkte oplossingen van de CCL vraagstukken, voorkomende in de Allereerste Gronden der Stelkunst, met eene nieuwe verzameling van CCL vraagstukken, en eenige bijlagen' (1826). In dit boek van 560 bladzijden worden alle oplossingen in extenso afgedrukt! Niets wordt de onderwijzer overgelaten. Een uitspraak van De Gelder als 'Niemand meer dan ik zelve, is een grooter voorstander der beknoptheid . . .' doet in dit verband wel wat komisch aan. De 'Herinnering' waarmee de laatstgenoemde verzameling begint, een uitvoerig didactisch betoog, is voor ons onder meer interessant door de verklaring die De Gelder erin geeft voor zijn fiasco als docent aan een Latijnse school.

6 Van deze auteurs noem ik Badon Ghyben's 'Beginselen der meetkunst voor de kadetten van alle wapenen' (1852^3), H. Strootman's 'Beginselen der cijferkunst (1855^4, eerste gedeelte, 1854^3, tweede gedeelte) en zijn 'Vraagstukken en oefeningen ter toepassing van het geleerde in de beginselen der meetkunst (1863^6). Een meetkundeboek van J. C. J. Kempees verscheen in 1854.
Een van Versluys' bezwaren tegen deze auteurs is het feit, dat zij het onderscheid tussen congruentie en symmetrie verwaarlozen.
Badon Ghyben's 'Gronden der Beschrijvende Meetkunde' was nog in de twintigste eeuw een bekend leerboek bij de opleiding voor de akte wiskunde m.o.K[1].

7 De titel van het boekje van Dr. D. J. Steyn Parvé luidde: 'Het wiskundig onderwijs in Nederland' en werd in 1850 bij Kramers in Rotterdam uitgegeven.

8 Tot de betere leerboeken waarop Versluys doelt, maar die hij in dit verband zelf bezwaarlijk kon noemen, behoren in de eerste plaats zijn eigen leerboeken.
In 1874 waren reeds verschenen:
'Beginselen der nieuwere meetkunde', J. B. Wolters, 1868; Versluys was toen pas 23 jaar.
'Leerboek der vlakke meetkunde, J. B. Wolters, 1869.
'Leerboek der Stereometrie', P. Noordhoff, 1871.
'Algebraïsche vraagstukken', P. Noordhoff, 1873.
De mededeling 'Leeraar aan de hoogere burgerschool te Groningen' op de titelpagina's wordt na

zijn verhuizing naar Amsterdam niet door een andere beroepsmededeling vervangen. Versluys' boeken waren beknopt, overzichtelijk, helder geschreven. De auteur zelf wijst op Franse en Duitse beïnvloeding. Voor de meetkunde was het van betekenis dat de axioma's waarvan werd uitgegaan, scherp werden aangegeven. In dit verband verwijs ik ook naar mijn artikel in Euclides 48, p. 107–110.

Didactische Literatuur

The Mathematical Gazette, vol. 58, nr. 405, oktober 1974

In dit nummer trof me het meest:

Een verslag van A. Owen en F. R. Watson: The mathematical boarding schools of the USSR. Er is sinds kort een 10-jarige leerplicht in de SU (7 t/m 16 jaar). De gewone dagscholen – alle wat wij zouden noemen 'openbaar' – zijn 'comprehensive and unstreamed'. In enkele honderden scholen is het mogelijk dat een leerling een specialisatie kiest in vakken als wiskunde, muziek, Engels, Russisch (n.l. in gebieden waar Russisch niet de spreektaal is), literatuur, natuurwetenschappen. In zulke scholen ontvangen de leerlingen in het algemeen extra uren in hun specialisatie, maar ze volgen overigens het normale leerplan. De lessen worden bijna steeds 's morgens gegeven; 's middags zijn er extra activiteiten als sport, clubs, ook wel eens een extra mogelijkheid om gewone schoolvakken te doen. Studiegroepen en extra lessen worden veelal begeleid door studenten en stafleden van de universiteiten.
Van meer belang zijn de kostscholen waar meer begaafden in hun vak beter aan hun trekken komen. Van zulke scholen zijn er 7 voor wiskunde: in Moskou (opgericht in 1963 door A. N. Kolmogorow, die nog steeds actief bij het werk in de school betrokken is), in Kiew, Leningrad, Novosibirsk, Wilna, Erevan en Tiflis.
De eerste en vierde van de scholen werd door de rapporteurs bezocht.
De scholen kennen alleen de 9e en 10e klassen (15–16 j.). Er is een strenge selectie bij de toelating. De locale èn regionale 'olympiades' worden gebruikt om interesse te kweken en de mogelijkheden te publiceren die de speciale scholen bieden.
Die scholen zijn overigens niet bestemd om 'wiskunde-kracht-patsers' af te leveren, maar om begaafden zover te brengen dat ze een universiteit kunnen bezoeken (ik begrijp dat dit van de 'gewone' school af bijna niet mogelijk is).
De wiskundigen van de universiteiten hebben een belangrijke inbreng in de scholen; zij behoren vaak tot de staf van de school terwijl part-timers hun werk verdelen tussen school en universiteit. De leerlingen ontvangen 36 lessen (van 45 min.) per week. Daarvan zijn er resp. 8, 8 en 3 voor wis-, natuur- en scheikunde, terwijl de andere uren bestemd zijn voor literatuur, geschiedenis, lich. opvoeding, aardrijkskunde, vreemde taal. De school in Novosibirsk telde 503 leerlingen, verdeeld over 21 klassen; voor wis-, natuur- en scheikunde werden de groepen gehalveerd (12 à 13)!
De gewone scholen hebben een leerplan dat voor de gehele SU geldt. In de kostscholen is er geen uniform program; het wordt eigenlijk per school bepaald door de universitaire begeleiders. Dit is beslist iets bijzonders in het opvoedingssysteem van de Russen, dat immers sterk de nadruk legt op gelijkheid.
De rapporteurs noemen een aantal onderwerpen die ze aantroffen in het plan van een school. In de appendix wordt de inhoud beschreven van de Moskouse school. Dat lijkt ons een goed programma, hoewel de korte beschrijving te weinig zegt over het niveau. Enkele in mijn ogen verouderde onderwerpen zijn er natuurlijk toch bij.

A. M. Koldijk

Eindexamen Middelbare Technische Scholen

Eerste deelexamen WISKUNDE, Tijd: 9.00–11.30 (19 nov. 1974)

Aanwijzingen:

a. Het gebruik van rekenliniaal, logaritmentafel en V.M.T.S.-formuleblad is toegestaan;
b. Uitkomsten zonder bijbehorende berekeningen worden niet goedgerekend;
c. Bij alle opgaven wordt uitgegaan van de getallenverzameling $\mathbb{R}$.

OPGAVE I.

a. Bereken het getal a als: $\lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^3+2x^2+3x+4}{9+7x+6x^2+5x^3} = 4$;

b. Bereken: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{(8-5x)}-2\sqrt{2}}{5x}$;

c. Bereken: $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+x^2-6x}{x^2+2x-3}$; *d.* Bereken: $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x-2}$.

OPGAVE II.

A. Bereken de oplossingsverzameling voor het getal p, indien de oplossingsverzameling van de ongelijkheid $x^2+5x+p < 4$ leeg is.
B. Gegeven de functie $f: f(x) = {}^a\log 2x$.
  a. Bereken a als $f(2) = -2$;
  b. neem $a = 2$, bepaal nu van $f: f(x) = {}^2\log 2x$ de inverse functie $f^{inv}: f^{inv}(x) = \ldots$
  c. Teken de grafieken van f en f^{inv} uit b in één assenstelsel.

OPGAVE III.

Gegeven is de functie f gedefiniëerd door $f(x) = 3x^4+2$.

a. Toon met behulp van $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ aan, dat van de gegeven functie f de afgeleide functie moet zijn $f': f'(x) = 12x^3$;
b. Bepaal de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$;
c. Waarom zijn f en f' beide continue functies?

OPGAVE IV.

Bepaal de afgeleide functies f' van de functies f gedefiniëerd door:

a. $f(x) = (2+\sqrt{x})(3x-5)$; *b.* $f(x) = \sqrt{(x^4-1)}$; *c.* $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x+1}$;

d. $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}$.

OPGAVE V.

Gegeven zijn de functies f en g gedefiniëerd door $f(x) = 1 - \cos 2x$ en $g(x) = 1 - \sin x$, beide met domein $[0, 2\pi]$.

a. Bepaal het bereik van f en g;

b. Schets in één assenstelsel de grafieken van h: $h(x) = \sin x$ en g: $g(x) = 1 - \sin x$

c. Schets in één assenstelsel de grafieken van k: $k(x) = \cos 2x$ en f: $f(x) = 1 - \cos 2x$

d. Schets in één assenstelsel de grafieken van f en g;

e. Los op $f(x) = g(x)$;

f. Bepaal het interval waarvoor geldt $f(x) \geqq g(x)$.

Tweede deelexamen WISKUNDE. Tijd: 9.00–11.30 (25 feb. 1975)

OPGAVE I

Een functie f is gedefiniëerd door $f(x) = 1 + e^{-x}$ met $x \geqq 0$.

a. Bepaal de afgeleide functie;

b. Toon aan dat f een dalende functie is;

c. Bereken $\lim_{x \to \infty} f(x)$;

d. Teken de grafiek van f;

e. Bepaal de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafiek van f en de lijnen met vergelijkingen $y = 0$, $x = 0$ en $x = a$.

OPGAVE II

Gegeven zijn de functies f en g gedefiniëerd door

$$f(x) = -x^2 + 4x$$
$$g(x) = x^2 - 2x$$

a. Los de vergelijking $f(x) = g(x)$ op;

b. Teken de grafieken van f en g in één assenstelsel;

c. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van f en g;

d Toon door berekening aan dat het in *c.* berekende vlakdeel in twee stukken van gelijke oppervlakte verdeeld wordt door de lijn met vergelijking $y = x$.

OPGAVE III

a. Bepaal de primitieve functies van een functie f gedefiniëerd door

$$f(x) = \cos \frac{ax + b}{c};$$

b. Bepaal de primitieve functies van een functie f gedefiniëerd door $f(x) = ax^{b+\frac{1}{2}}$

c. Bereken de integraal $\int_0^{\pi/6} \sin^2 x \, dx$;

d. Bereken de integraal $\int_{-1}^{1} (x+1)\sqrt{(x+1)}\,dx$;

e. Bereken het getal k indien $\int_{k}^{k+2} (4x+1)\,dx = -6$.

OPGAVE IV

Gegeven is een functie f gedefiniërd door $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$ met domein $[0, 2\pi]$.

a. Bereken het volledig origineel van nul;
b. Bepaal de afgeleide functie;
c. Bepaal op welke intervallen f stijgend, respectievelijk dalend is;
d. Bereken de coördinaten van de locale extremen en van het buigpunt met horizontale buigraaklijn;
e. Teken de grafiek van f.

OPGAVE V

Gegeven is een functie f gedefiniëerd door $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(ax+b)}}$ met $a \neq 0 \wedge b \neq 0$

a. Bepaal de primitieve functies van f;
b. De primitieve functie waarvoor geldt $F\left(\dfrac{-b}{a}\right) = 2$ duiden we aan met F_1;

Bereken de constante C van F_1;

c. De primitieve functie die als constante $C = 0$ heeft, duiden we aan met F_2. Bereken a en b indien de punten $(-\frac{1}{2}, 0)$ en $(0, 1)$ op de grafiek van F_2 liggen;
d. Substitueer de gevonden waarden voor a en b in f en F_2 en schets in één assenstelsel de grafieken van f en F_2;
(Als u de waarden van a en b niet heeft gevonden, neem dan $a = 1$ en $b = 4$ en teken hiermee de gevraagde grafieken).

Derde deelexamen WISKUNDE. Tijd: 9.00–11.30 (3 juni 1975)

OPGAVE I

Gegeven zijn de punten $A(-5, 0)$, $B(3, -4)$ en $C(1, 0)$

a. Teken driehoek ABC;
b. Bepaal een vectorvoorstelling van de zwaartelijn uit hoekpunt A;
c. Bereken de coördinaten van het hoogtepunt van driehoek ABC;
d. Bepaal de vergelijking van de deellijn van hoek ABC van driehoek ABC.

OPGAVE II

In een balk $\dfrac{DEFG}{OABC}$ zijn de punten H, K en L respectievelijk de middens van

de ribben ED, EF en CG.

Gegeven zijn de vectoren $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{OC}$ en $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{OD}$.

a. Geef een vectorvoorstelling uitgedrukt in de vectoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{d}$ van
de lijn door de punten C en H,
de lijn door de punten K en L,
de lijn door de punten A en L;

b. Geef een vectorvoorstelling uitgedrukt in de vectoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{d}$ van het vlak α door de punten B, C en D;

c. Toon aan dat lijnstuk CH in vlak α ligt;

d. Toon aan dat lijnstuk KL evenwijdig is aan vlak α;

e. Het snijpunt van lijnstuk AL en vlak α is S.
Druk de plaatsvector van S uit in $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ en $\boldsymbol{d}$.

OPGAVE III

Gegeven zijn de vlakken α en β met als vergelijkingen

α: $x+2z-3=0$

β: $-2y+z=0$.

a. Geef van α en β een vectorvoorstelling;

b. Bepaal een vectorvoorstelling van de snijlijn van α en β;

c. Bereken de afstand van punt $P(-6, -6, -8)$ tot vlak α;

d. Bereken de hoek van de vlakken α en β.

OPGAVE IV

Gegeven zijn de punten $A(5, -2)$ en $B(-2, 3)$.
Bereken de coördinaten x en y van punt $C(x, y)$ gelegen op een lijn m met als vergelijking $2x-y-4=0$ zó dat dr,ehoek ABC rechthoekig is in C.

OPGAVE V

Gegeven is de onafhankelijke vectorverzameling $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$.
Is de vectorverzameling $\{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}), (\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\}$
lineair afhankelijk of lineair onafhankelijk?
Motiveer uw antwoord.

Genootschap voor Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen

Voorjaarsvergadering van het Genootschap voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde, Natuurwetenschappen en Techniek. Deze zal gehouden worden op zaterdag 24 en zondag 25 april 1976 te Enkhuizen. Belangstellenden kunnen zich voor nadere informatie en toezending van het programma wenden tot de secretaris Mevr. M. Houben-Fournier, Helmhof 36, Alphen a.d. Rijn.

Computer controleert wiskundige stellingen

Project Automath aan T. H. Eindhoven in nieuw stadium

Aan de onderafdeling der Wiskunde van de Technische Hogeschool Eindhoven is het project Automath een nieuw stadium ingegaan. Doel van dit project is het construeren van en experimenteren met een (kunstmatige) taal waarin wiskundige bewijzen kunnen worden geformuleerd. Het is gebleken, dat de tot dusver ontwikkelde talen, aangeduid met de naam Automath, zich lenen voor het formuleren van grote delen van de bestaande wiskunde. Bovendien zijn de talen praktisch geschikt gebleken voor verwerking op de computer.
De jongste ontwikkeling die een mijlpaal in de geschiedenis van het project Automath is, is de volledige verificatie op de Burroughs B 6700-computer van de T.H. Eindhoven van een klassiek wiskundeleerboek ('Grundlagen der Analysis' van E. Landau). Zeer recent controleerde de computer de laatste stelling ('Satz 301') uit dit boek en bevond het bewijs correct.
Aan het Automath-project dat is opgezet door prof. dr. N. G. de Bruijn wordt bij de onderafdeling der Wiskunde al een zevental jaren gewerkt. Een groot deel van het project wordt gesubsidieerd door de Nederlandse organisatie voor Zuiver-Wetenschappelijk Onderzoek (Z.W.O.).
Aan de Automath-talen worden de volgende eisen gesteld:
1 de correctheid van een bewijs moet mechanisch (met een computer) kunnen worden gecontroleerd; de computer moet goede bewijzen goedkeuren en foute bewijzen afkeuren;
2 de controle van in de taal geschreven teksten moet op bestaande computers praktisch uitvoerbaar zijn, er moet dus niet al te veel geheugenruimte of rekentijd worden gebruikt;
3 bewijzen in de taal geformuleerd moeten niet al te veel afwijken van bewijzen zoals die in de wiskundige praktijk gangbaar zijn, zodat een niet-formeel wiskundig bewijs zonder al te veel moeite in deze taal kan worden vertaald.
Er zijn door logici en wiskundigen die de grondslagen der wiskunde onderzoeken al talen geconstrueerd die in principe geschikt zijn om er controleerbare bewijzen in op te schrijven. Met de in het project Automath ontwikkelde talen zijn de mogelijkheden echter veel groter.
Met deze talen kunnen lange en vervelende bewijzen, bijvoorbeeld bewijzen van correctheid van computerprogramma's, worden gecontroleerd. Voorts kunnen de nieuwe talen worden toegepast bij het maken van een bibliotheek waarin grote delen van de huidige wiskunde geformaliseerd bijeen zijn gebracht en waarnaar verwezen kan worden bij het formaliseren van andere bewijzen. Ook dienen de talen in het project voor het verkrijgen van inzicht in de structuur van wiskundige beschouwingen. Voor het onderwijs in de wiskunde en van het grondslagenonderzoek kan dit van belang zijn.

De meest recente versies van de Automath-talen voldoen aan de eis naar meer inzicht in de structuur van wiskundige beschouwingen. Niet alleen het schrijfgemak is toegenomen, maar ook de leesbaarheid. Er is een computerprogramma gemaakt dat teksten die geschreven zijn in de oudere Automath-talen kan lezen en verifiëren. Het programma dat de nieuwe talen de baas kan is vrijwel gereed.

Uit de tijdschriften

MNU: Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, jaargang 28, Heft 2, maart 1975

SI-eenheden
Het zal bekend zijn dat het SI-eenhedenstelsel, krachtens een EEG-richtlijn die in mei 1973 van kracht is geworden, na 31 december 1977 in de lidstaten wettelijk verplicht zal worden gesteld. Slechts een beperkt aantal in de wet genoemde eenheden die niet tot het SI behoren, zal naast dit stelsel in gebruik blijven.
In het bovengenoemde nummer van MNU vinden we een artikel over de SI-eenheden, geschreven door Ost D. J. Weninger (Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, 23 Kiel, Olshausenstrasse 40–60). Enkele punten uit zijn artikel:
De eenheden 1 Pascal en 1 Farad zijn niet goed bruikbaar in de school. 1 Pascal is te klein, 1 Farad te groot.
In het onderwijs zal men niet gemakkelijk afstand doen van eenheden als 1 km, 1 h, 1 km/h.
We zullen dus in het onderwijs niet de SI-eenheden op de voorgrond plaatsen, maar alle eenheden gebruiken die wettelijk toegestaan zijn.
De vraag naar eenhedenstelsels heeft tegenwoordig bijna alleen nog historische waarde. Belangrijker is de vraag naar groothedenstelsels. In het bijzonder de vraag welke en hoeveel basisgrootheden aanvaard zullen worden. Men concentrere zich in het onderwijs op het invoeren van de basisgrootheden en legge niet te veel de klemtoon op de SI-eenheden, daar deze slechts een onderdeel vormen van de in totaal gebruikte eenheden.

G. Krooshof

De gemeenschappelijke bijeenkomst met de Vlaamse collega's

Zoals in het vorige nummer reeds aangekondigd is, zal op zaterdag 13 maart een gemeenschappelijke bijeenkomst plaats hebben van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Vlaamse Vereniging Wiskundeleraars.

Plaats:	Technische Hogeschool Eindhoven.
Onderwerp:	Het aanvangsonderwijs in de planimetrie.
Indeling:	
10.30–11.00	ontvangst van de deelnemers; koffie
11.00	uiteenzetting door een Vlaamse spreker hoe het aanvangsonderwijs in de planimetrie in Vlaanderen ingericht is; na afloop discussie
12.30	lunch
14.00	Dr. P. M. van Hiele licht toe op welke principes het aanvangsonderwijs in de meetkunde in Nederland berust; na afloop discussie om 14.45 een onderbreking voor de thee
16.00	evaluatie en sluiting

De T.H. bevindt zich dichtbij het station Eindhoven aan de oostzijde. Op het terrein van de T.H. is met pijlen aangegeven hoe men de plaats van bestemming bereikt.
De kosten bedragen *f* 10,–, alles inbegrepen. Men wordt dringend verzocht zich **uiterlijk 25 februari** op te geven door storting van dit bedrag op giro 143917 ten name van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
Het is de bedoeling dergelijke bijeenkomsten vaker te doen plaats hebben. We hopen dan ook, dat deze eerste keer een succes zal blijken. Opkomst wordt daarom dringend op prijs gesteld.

Namens het bestuur,
P. G. J. Vredenduin

Didacta 1976 nimmt Gestalt an

Die Europäische Lehrmittelmesse, Didacta 76, die vom 23. bis 27. März 1976 in ihrer 14. Auflage in den Hallen der Schweizer Mustermesse in Basel stattfindet, nimmt mehr und mehr Gestalt an. Gegen 600 Aussteller aus Europa und Uebersee werden auf einer Netto-Ausstellungsfläche von beinahe 25.000 m^2 (Brutto-Fläche 60.000 m^2) ihr breitgefächertes Angebot präsentieren. Neun Länder sind mit Kollektivständen vertreten, nämlich Australien, die Deutsche Demokratische Republik, Frankreich, Grossbritannien, Israel, Italien, Polen, Rumänien und Ungarn.
Das Ausstellungsgut dieser bedeutendsten Lehrmittelmesse der Welt gliedert sich in acht Gruppen:
- Allgemeine Schulausstattung, Fachraumeinrichtungen
- Verbrauchsmaterialien
- Demonstrations- und Experimentalgeräte
- Sammlungen und Modelle
- Wandkarten, Wandbilder, Hafttafeln und Zubehör
- Audiovisuelle Medien und Elektronische Datenverarbeitung (Hardware und Software)
- Bücher, Atlanten, Zeitschriften usw.
- Programme, Kurse und didaktische Spiele

Grosses Gewicht wird bei der Didacta 76 auf eine umfassende Information gelegt. Das zeigen Sonderschauen wie die 'Amerikanische Schularchitektur-Ausstellung' oder die Schau 'Unterrichtshilfen für die öffentlichen Schulen aus der Wirtschaft'.

Boekbespreking

Raymond Hutin, *L'enseignement de la mathématique*; 376 blz.; Editions Delta S.A.; Vevey 1974.

De ondertitel van dit werk, produkt van pedagogische research-arbeid en didaktische bezinning, luidt: 'Contribution à la réalisation d'une réforme de l'enseignement à l'école primaire'. Het is een uitgave die uiteraard allereerst van betekenis belooft te worden voor het onderwijs in Zwitserland zelf, maar die door de brede opzet, de experimentele fundering, de uitvoerige, zorgvuldige documentatie toch ook betekenis kan krijgen voor alle Nederlandse onderwijzers en leraren die betrokken zijn bij de op gang zijnde heroriëntering van ons wiskunde-onderwijs.

In dit boek wordt allereerst verslag uitgebracht over de uitkomsten van een didactische enquête. In 1965 toen de plannen hiertoe ontstonden, was in het kanton Genève de moderne wiskunde in het voortgezet onderwijs nog maar tot bescheiden hoogte doorgedrongen, terwijl het internationale streven naar modernisering van het wiskunde-onderwijs het onderwijs op de basisscholen nog maar nauwelijks had beroerd. In dat jaar nu werd op initiatief van de EPIA (école professionelle de l'industrie et de l'artisanat) besloten een onderzoek te doen instellen naar lacunes in de rekenkundige kennis bij leerlingen aan diverse scholen voor beroepsonderwijs. Het bleek mogelijk het geplande onderzoek uit te breiden tot alle leerlingen die negen jaar leerplichtig onderwijs achter de rug zouden hebben, waardoor het mogelijk werd de leerresultaten van onderscheiden groepen van leerlingen te vergelijken.

Het onderzoek gaf aanleiding tot een tweede enquête die zich in de jaren 1968–1969 zou gaan uitstrekken over de leerlingen van het derde tot en met het zesde leerjaar van de basisscholen. Doel ervan was de eventuele oorzaken op te sporen van de aan de dag getreden mislukkingen van het rekenonderwijs, mislukkingen die men meende te moeten toeschrijven aan een niet meer zinvolle leerstofkeuze en aan didactisch-psychologisch niet langer verantwoorde werkvormen.
Dit tweede onderzoek strekte zich de facto uit over de leerlingen die zich bevinden in de derde ontwikkelingsfase door Piaget onderscheiden in zijn theorie over de intelligentieniveaus. Piaget onderscheidt in de kinderlijke ontwikkeling:

1 de periode van de sensori-motorische intelligentie (0–2 jaar);
2 de periode van de symbolisch-intuïtieve intelligentie (2–7 jLar);
3 de periode van de logico-concrete intelligentie (7–12 jaar);
4 de periode van de hypothetico-deductieve intelligentie (12 jaar en ouder).

Het Geneefse onderzoek bestreek de leeftijdsgroep van 8–11 jaar. Hutin spreekt in zijn boek van de développement du raisonnement logico-mathématique'.
Uitvoerig brengt Hutin verslag uit over het aan de dag getreden kennisniveau van zijn proefpersonen. In verband met de aanvankelijke opzet van het onderzoek kwam hij ertoe bij de rubricering van de enquêteresultaten onder de leerlingen van het beroepsonderwijs een zestal beroepsgroepen te onderscheiden naast enkele groepen van leerlingen uit het traditionele voortgezet onderwijs. Uit de enquêtes kon worden geconcludeerd, dat de op de basisscholen onderwezen rekenkundige begrippen uiterst pover werden beheerst, zodat ze na tien jaren niet meer behoorlijk konden functioneren bij de leerlingen uit het beroepsonderwijs, terwijl de onderwezen leerstof weinig of geen betekenis bleek te hebben voor het latere wiskundeönderwijs van de leerlingen van het traditioneel algemeen vormend secundair onderwijs, die bij de enquête op een hogere score konden bogen. We vinden in het enquêteverslag uitvoerige documentatie over bereikte onderwijsresultaten, gedifferentieerd over 21 groepen wat de leerlingen betreft en over een dertigtal deelgebieden van het wiskunde-onderwijs. Dit heeft geleid tot een boeiende analyse en de grondslag gelegd voor goed gefundeerde kritiek op de bestaande onderwijssituatie. Ook al is dan de ontdekking van de minimale leerprestaties die bij de 'apprenties de l'école ménagère' werden waargenomen tegenover de topprestaties van de afdeling architectuur van de 'école technique supérieure' geen schokkende onthulling!.

Het is wel jammer, dat van de bij de enquêtes gebruikte items de officiële redactie in dit boek nergens te vinden is. Voor een oordeel over de doeltreffendheid van leerpsychologische enquêtes als de onderhavige is het toch wel van essentieel belang te kunnen nagaan in welke vorm de problemen inhoudelijk en taalkundig aan de proefpersonen werden voorgelegd. Hebben de leerlingen de gestelde problemen uit de gegeven tekst inderdaad goed kunnen begrijpen? De auteur maakt in dit verband de opmerking: 'Il serait fastidieux et inutile de décrire par le menu les 58 épreuves auxquelles les sujets des différents degrées ont été soumis' (150). Los van dit bezwaar heb ik echter voor de wijze waarop de evaluatie van de enquête heeft plaats gehad alle lof. Dank zij de gedetailleerde analyse vindt men op de bladzijden 158–202 een schat van waardevol didactisch commentaar.

Wat de structuur van het werk betreft het volgende.
Het boek begint met een summiere inleiding over de betekenis die pedagogisch-didactisch onderzoek, uitgevoerd binnen de school, voor het onderwijs kan hebben. Er wordt in geschetst, hoe we thans leven in een gemathematiseerde maatschappij, waarin wiskundige begrippen een communicatiemiddel gaan vormen dat in betekenis niet behoeft onder te doen voor de moedertaal. In de geest van Bourbaki-Piaget concludeert de auteur: 'La théorie des ensembles fournit un langage formalisé apte à décrire le phénomène principale que représente la découverte des trois structures-mères: les structures algébriques, d'ordre et topologique' (17).

De drie hoofdafdelingen van het boek dragen opvolgend tot titel: constat d'une situation, une réforme indispensable, esquisse d'une méthodologie.
In de eerste afdeling wordt de deplorabele situatie van het rekenonderwijs op de basisschool geschetst, zoals deze uit de enquête naar voren is gekomen. In de tweede wordt aangegeven welke modernisering in dit onderwijs verbetering belooft te brengen. In de derde afdeling tenslotte wordt een methodologie uitgewerkt, waarin pedagogische doelstellingen een voorname rol spelen en waarin indringend wordt nagegaan welke plaats onderwerpen als verzamelingenleer, relaties en structuren, talstelsels en ruimteonderzoek behoren in te nemen en tot welke veranderingen in het werk van de onderwijzer de modernisering onverbiddelijk zal leiden. Het traditionele onderwijs, aldus Hutin, wordt gekenmerkt door schier eindeloze herhalingen, door stereotiepe oplossingen van gestelde problemen, door het ontbreken van leersituaties waarin de jeugd passende gelegenheid krijgt tot zinvolle ontwikkeling van eigen creatieve vermogens. Het onderling verband dat er bestaat tussen de onderscheiden delen van het rekenonderwijs komt absoluut niet uit de verf. Van het zoeken door de leerlingen zelf van de meest economische strategie bij het oplossen van gestelde problemen is nimmer sprake.
Op grond van de geconstateerde tekorten geeft de auteur in de tweede afdeling aan wat de grondslag voor de modernisering behoort te zijn. Het zal de Nederlandse lezer daarbij niet verwonderen dat dit Geneefse onderzoek ertoe leidt de leerpsychologie van Piaget op de voorgrond te plaatsen. Maar ook de betekenis van tal van anderen, zoals Dienes, Nicole Picard, Freinet, Fréderique Papy, Matthews, Rosenbloom en anderen wordt aangegeven. De auteur moet daarbij constateren dat tot dusver in het kanton Genève, in Piaget's onmiddellijke omgeving, in handleidingen voor het rekenonderwijs en in de schoolprogramma's nog geen beïnvloeding door het werk van Piaget viel te ontdekken!

Uiteraard is in het bijzonder de in het laatste hoofdstuk gegeven schets van een wiskundige methodologie voor het basisonderwijs van betekenis voor de onderwijzers en leraren buiten Zwitserland die naar vernieuwing streven. Er worden in dit hoofdstuk een zestal doeleinden voor het wiskundeonderwijs geformuleerd, waarvan de ontwikkeling van het wiskundig georiënteerde logisch denken aan de spits staat. Eveneens worden een zestal uitgangspunten voor een vernieuwde onderwijspraktijk opgesteld, waarvan de voornaamste luidt: 'La mathématique ne s'enseigne pas, elle s'apprend' (209). Traditioneel cijferwerk dient minder aspect te krijgen. Het dient niet aan andere wiskundige activiteiten vooraf te gaan maar erop te volgen. 'Les travaux de Piaget ont abondamment démontré la primauté des classifications et des sériations qualitatives sur les mêmes opérations concernant la construction du nombre' (210).

Activiteiten die de ontwikkeling van het logisch denken stimuleren worden op de voorgrond geplaatst. De sociale betekenis van gemoderniseerd wiskunde-onderwijs krijgt extra relief. De auteur heeft daarbij vooral oog op die groepen van leerlingen die tot dusver zo gemakkelijk in de verdrukking kwamen door een overijlde opname in het productieproces. Een radicale verandering

in de verhouding onderwijzer-leerling wordt noodzakelijk geacht. Verregaande indivualisering van het onderwijs is voor het bereiken van de gestelde doelen onvermijdelijk.

In de didactische schets is een overzicht opgenomen van de wijze, waarop onderwerpen als verzamelingen, relaties, talstelsels, ruimteonderzoek in het onderwijs tot hun recht dienen te komen (217–360). Door de uitvoerige detaillering wordt dit laatste hoofdstuk tot een rijke bron van waardevol didactisch commentaar.

De auteur wijst op de repercussies die de modernisering zal meebrengen voor de onderwijzersopleiding. De psychologie van de cognitieve processen en de problematiek rondom het groepsgedrag zullen intense belangstelling dienen te krijgen. De pedagogische kwaliteiten van de onderwijzer blijven zwaar wegen en zijn een noodzakelijke voorwaarde voor succes in de school. De snelle ontwikkeling die we doormaken leidt ertoe dat een 'animation pédagogique permanente' onontkoombaar zal blijken.
Naar aanleiding hiervan eindigt de auteur met de opmerking dat de tijd die de docent aan zijn voortgezette beroepsopleiding zal dienen te wijden, gevonden moet worden binnen de normale arbeidstijd van die docent.

Dit werk is onmisbaar in alle wiskundige en pedagogische vakbibliotheken van onze Pedagogische Akademies, maar stellig eveneens op zijn plaats in de vakbibliotheken op onze scholen voor voortgezet onderwijs.

Joh. H. Wansink

Drs. T. Dijksterhuis, *Numerieke wiskunde voor het hoger beroepsonderwijs*, XVI + 185 blz., Nijgh en Van Ditmar, *f* 37,50.

Achtereenvolgens komen in dit boek aan de orde: 1. Fouten en foutenrekening; 2. het iteratief oplossen van vergelijkingen; 3. approximatie en interpolatie; 4. numerieke differentiatie; 5. numerieke integratie; 6. numerieke integratie van gewone differentiaalvergelijkingen ingeval van beginwaardeproblemen; 7. de structuur en eigenschappen van de verzameling der reële getallen $\mathbb{R}$ en die van de verzameling der reële matrices $\mathbb{M}$; 8. het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen, matrix inversie en de berekening van determinanten; 9. de methode van de kleinste kwadraten; 10. randwaarde problemen bij tweede en hogere orde differentiaalvergelijkingen.
Uit deze opsomming komt een ambitieus programma naar voren dat de schrijver op een bewonderenswaardige wijze aan de leerlingen van het genoemde onderwijs presenteert. Toch wil ik enige kritische kanttekeningen maken die mogelijk in een volgende druk verwerkt kunnen worden.
Allereerst enige drukfouten
xn m.z. x_n (bl. 26).
stantwaarte m.z. startwaarde (bl. 27).
$\begin{pmatrix} B & -C \\ B & C \end{pmatrix}$ m.z. $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$ (bl. 145).
the m.z. het (bl. 145).
Didaktisch heb ik bezwaar tegen het feit dat begrippen, algoritmen etc. genoemd worden voordat ze behandeld zijn. Op moment van lezen blijft dit verbale kennis. Dit komt in dit boek nogal eens voor bijv. op bl. 2 (midden) bl. 27 (opm. 2, begrip orde is nog niet bekend) bl. 57 (kleinste kwadraten methode, met verwijzing).
De opmerkingen op blz. 27 verdienen m.i. enige toelichting.
De stelling op blz. 58 moet naar mijn mening minstens aannemelijk gemaakt worden vanwege de centrale fundamentele plaats die zij inneemt.
Op bl. 61 behoort $W(n) = \prod_{k=0}^{n} (x - x_k)$ vermeld te worden in de formulering van de stelling.
De preciese betekenis van het begrip representatief verdient toelichting (bl. 88).
De opmerking bovenaan bl. 163 is in het algemeen niet waar (wel nodig, niet voldoende.)
Is het ordesymbool voldoende bekend? En de begrippen bandmatrix stelsel (173) en tridiagonale matrix (174)?
Bewondering verdienen de talrijke opgaven die een werkelijk creatieve inzet van de gebruiker vragen. Speciaal in de z.g. practicum opgaven wordt geappeleerd aan de zelfwerkzaamheid van de student. 'Daar alle H.T.S.- en binnenkort over eigen digitale computerfaciliteiten zullen beschikken is een aansluitend practicum te realiseren'.
Een gedegen werk dat zijn weg zeker zal vinden.

W. Kleijne

M. A. Krasnoselskii, V. Sh. Burd, and Yu. S. Kolesor, *Non linear almost periodic oscillations*, John Wiley & Sons, New York, 1973, 326 pagina's (Israel Program for Scientific Translations).

Al lange tijd is de studie van bijna periodieke functies een belangrijk onderdeel van de analyse. Een simpel voorbeeld kan een indruk geven. $a \sin \lambda x + b \sin \mu x$ is periodiek als λ en μ een rationale verhouding hebben. Is de verhouding irrationaal dan is de functie (voor $a \cdot b \neq 0$) niet meer periodiek. Toch heeft hij nog eigenschappen die op die van periodieke functies lijken. Namen als H. Bohr (1924), Bochner, von Neumann, Maak, Corduneau (Almost Periodic Functions, 1961 met o.a. 500 literatuurverwijzingen) geven een ontwikkeling aan.
Lineaire differentiaalvergelijkingen geven soms periodieke oplossingen, soms bijna periodieke oplossingen. Wat is de samenhang van het gedrag van de oplossing in relatie tot de coëfficiënten van de differentiaalvergelijking? Dit boek behandelt daar een onderdeel van. Lineaire differentiaaloperatoren:

$$L = \frac{d^m}{dt^m} + A_1(t)\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} + \ldots + A_m(t)$$

geven differentiaalvergelijkingen $L(x) = f(t)$, (hierbij mag x een vector van onbekende functies zijn), de (matrix)coëfficiënten $A_i(t)$ hebben bijna periodieke elementen. Belangrijke hulpmiddelen in deze studie zijn Greense functies (vergelijk de klassieke potentiaaltheorie) en integraalvergelijkingen.
De hoofdstukken 1 en 2 geven een algemene inleiding en een analyse van speciale typen van bijna periodieke operatoren. In hoofdstuk 3 komen globale stellingen over bijna periodieke oplossingen van *niet* lineaire vergelijkingen. Hierbij komen ook toepassingen op verstoringen (bijna periodiek) in besturingsmechanismen van automatische contrôle systemen. Deze worden beschreven door vergelijkingen.

$$\frac{d\xi}{dt} = \lambda_0 \xi + d_1 \phi(c_1 \xi + (c, x))$$

$$\frac{dx}{dt} = Bx + d\phi(c_1 \xi + (c, x))$$

Het probleem is nu in hoeverre oplossingen van zo'n besturingssysteem stabiel zijn of dat ze door verstoringen gaan 'lopen' en bijv. naar een andere oplossing naderen (de storingen kunnen bijv. weer bijna periodiek verondersteld worden). Het laatste hoofdstuk (4) is geheel gewijd aan vergelijkingen met een kleine parameter. Speciaal aandacht aan zich vertakkende oplossingen (bifurcatie) wordt gegeven. Dit soort vertakkingsproblemen van oplossingen van stelsels differentiaalvergelijkingen is een zeer actueel onderwerp (o.a. in de zgn. globale analyse). Hoewel het in de behandeling wellicht abstract lijkt gaat het (op pag. 258) bijv. over zulke concrete dingen als een slinger waarvan het ophangpunt trilt. (Ook biologen zijn belangstellenden voor enkele van deze onderwerpen.) Het boek besluit met een samenvatting van het geheel in bijna 50 bladzijden, waaruit men een goede eerste indruk van dit probleemgebied krijgt.

F. van der Blij

A. P. de Bruijne; *Werkboek wiskunde voor het l.b.o.*; Meetkunde deel 3. Malmberg, Den Bosch, 143 blz., *f* 11,–.

De prijs is wel hoog voor een boek, dat maar één maal gebruikt kan worden. Zeker, als we bekijken wat er voor geboden wordt: bladzijden met illustraties die volstrekt overbodig zijn; nodeloos ingewikkelde formuleringen (probeer maar in $-bc^2 = ab^2 + ac^2$ de stelling van Pythagoras te herkennen); blokschema's die weinig zin hebben: als je uit de berekening geen *f* 4350,– hebt, doe hem dan overnieuw; soms zelfs elementaire fouten. Een gemiste kans voor het l.b.o.. Jammer.

J. T. J. Mahieu

Sigma, *Wiskunde voor mavo, havo, vwo*; deel 1 voor de brugklas; Wolters-Noordhoff bv, Groningen. 238 blz., *f* 17,75.

De gezamenlijke auteurs van Wolters-Noordhoff zijn bezig met een nieuwe serie, waarvan dit het eerste deel is. Het bevat de algebra- en meetkundeleerstof voor de brugklas. In de algebrahoofdstukken zit een grote hoeveelheid vraagstukken, waarvan een groot aantal in feite rekenopgaven zijn. Jammer genoeg blijkt dit de laatste jaren in steeds toenemende mate noodzakelijk te zijn. In het meetkundegedeelte komen van de transformaties de translatie, de spiegeling en de puntspiegeling aan de orde. In het laatste gedeelte wordt er pas gewerkt met bewijzen. In de uitgave is een groot aantal foto's en tekeningen opgenomen, die erg verduidelijkend zijn. Het boek lijkt mij te moeilijk voor de leerlingen, die op mavo-niveau zullen gaan werken. Voor toekomstige vwo-leerlingen en in iets mindere mate voor havo-leerlingen kan het zorgen voor een degelijke basis voor de verdere jaren. Eén bezwaar: de afmetingen van 20 x 21,5 cm maken dat het boek 4 à 5 cm breder is, dan de andere boeken op de plank.

J. T. J. Mahieu

Sigma, *Wiskunde voor mavo, havo, vwo*; deel 2hv voor de tweede klas havo en vwo; Wolters-Noordhoff bv, Groningen. 232 blz., *f* 20,75.

De verwachtingen, die ik had na het eerste deel werden niet beschaamd: een boek, waarmee goed te werken valt in de tweede klas. Het grootste gedeelte van dit boek wordt in beslag genomen door de algebrahoofdstukken. Opnieuw een groot aantal vraagstukken, waarvan vele de rekenvaardigheid op peil houden. In het meetkundegedeelte zullen de havoleerlingen moeite gaan krijgen met de bewijzen. De stelling van Pythagoras wordt gebruikt om de noodzaak van wortels aan te tonen. Nu maar wachten op de delen voor de derde klas.

J. T. J. Mahieu

Nederlandse Wiskunde Olympiade

1 De tweede ronde 1975 heeft plaatsgehad op 22 december j.l. De prijsuitreiking aan de beste tien zal op 27 januari 1976 zijn.
2 Aan belanghebbenden wordt medegedeeld dat ondanks intrekking van subsidie door het Rijk, het toch mogelijk is gebleken de Wiskunde Olympiade doorgang te laten vinden, door fondsen van andere instanties.
3 De *eerste ronde 1976* zal gehouden worden op de gebruikelijke manier op:
donderdagmiddag 8 april a.s. van 14.00–17.00 uur.
De scholen zullen enige weken van te voren de opgaven ontvangen.
4 De tweede ronde 1976 zal gehouden worden op *maandag 30 augustus a.s. te Utrecht.*
5 De beide data zijn gekozen om zo min mogelijk desorganisatie binnen de school te krijgen wegens proefwerken en schoolonderzoek.
6 In tegenstelling tot vorige jaren kunnen aan de eerste ronde zowel vierde als vijfde klassers van het V.W.O. meedoen. Op deze manier krijgt men, als men dat wil twee maal de gelegenheid om aan de wedstrijd mee te doen.
7 Of uitzending naar de Internationale Wiskunde Olympiade mogelijk blijft is op dit moment nog niet zeker.

J. van Dormolen, secretaris
Budapestlaan 6, Utrecht

Het Twaalfde Nederlands Mathematisch Congres

Het congres wordt gehouden aan de Vrije Universiteit, De Boelelaan, Amsterdam, in de week vóór Pasen, op woensdag 14 en donderdag 15 april 1976.

Sectievoordrachten

Zoals gebruikelijk zal bij het congres de nadruk liggen op korte voordrachten van ongeveer 25 minuten over de meest uiteenlopende wiskundige onderwerpen. Deze voordrachten worden als gebruikelijk ingedeeld in secties.

Oproep voor sprekers

De congrescommissie nodigt alle nederlandse wiskundigen uit tot actieve deelname aan het congres. Wij verzoeken een ieder die van plan is een sectievoordracht te houden, de titel van zijn voordracht zo spoedig mogelijk, doch vóór 15 februari 1976, op te geven bij de secretaris. Aan de sprekers zal gevraagd worden een korte samenvatting van hun voordracht te maken, die bij de congresbescheiden zal worden gevoegd. De samenvatting dient vóór 15 maart 1976 in ons bezit te zijn. Over de lay-out van deze samenvatting krijgen de sprekers tijdig bericht.

Algemene voordrachten

De slotvoordracht zal gehouden worden door Prof. dr. J. H. van Lint (TH Eindhoven). Over de openingsvoordracht volgen nog nadere mededelingen.

Speciale activiteiten

Tijdens het congres zal een symposium *Industriële wiskunde* gehouden worden onder voorzitterschap van Prof. dr. J. F. Benders.

Op een aantal secties zal speciale nadruk worden gelegd, doordat daar ook een aantal genodigde sprekers een voordracht zal houden. Het zijn de secties:

Topologie	(voorz.: Prof. dr. M. A. Maurice)
Operatoren theorie	(voorz.: Prof. dr. M. A. Kaashoek)
Mathematische biologie	(voorz.: Prof. dr. H. A. Lauwerier)
Didaktiek	(voorz.: Prof. dr. H. Freudenthal).

Aanmelding en correspondentie

Aan het congres zijn geen kosten verbonden. Voor deelname aan het congres dient men zich zo spoedig mogelijk, doch uiterlijk 15 maart 1976 op te geven bij de secretaris, door middel van een briefkaart met naam, adres en (eventueel) instituut. Degenen die zich op tijd hebben opgegeven, zal een deel der congresbescheiden en andere informatie van tevoren worden toegezonden. Alleen wanneer u zich tijdig opgeeft kunnen wij garanderen dat alle congresbescheiden voor u worden gereserveerd. Voor alle correspondentie richte men zich tot de secretaris.

Hotelreservering

In verband met de grote diversiteit van hotels in Amsterdam, zal de commissie zich niet met hotelreservering bezighouden. U wordt verzocht zelf kamers te reserveren. In verband met de paasdrukte raden wij u aan hiermee niet te lang te wachten. Voor reservering kunt u zich eventueel wenden tot: V.V.V. – Amsterdam, Rokin 5, tel. 020-6 64 44.

Lunches

Voor de lunches wordt gebruikt gemaakt van het restaurant van de VU; de betaling geschiedt ter plaatse.

Namens de congrescommissie
secr. congrescommissie Ned. Math. Congres
M. J. W. Jansen
Wiskundig Seminarium der Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081, Amsterdam

Recreatie

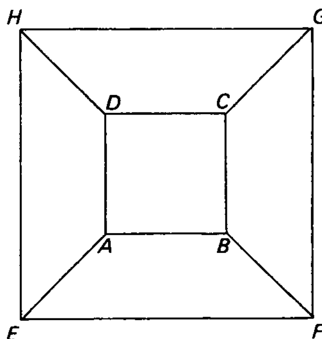
Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148, Doorwerth.

341. In een vlak liggen n rode en n blauwe punten. Geen drie van deze punten liggen op één rechte lijn. Bewijs dat het mogelijk is elk rood punt met een blauw punt zo te verbinden, dat geen van de verbindingslijnstukken een punt gemeen hebben. (Kwant 1975, nr. 1, pag. 41; meegedeeld door R. Troelstra.)

342. Iemand heeft vijf gewichten van resp. 1, 2, 3, 4, 5 gram. Hij heeft een normale weegschaal zonder gewichten. Door maximaal vijf wegingen moet hij de gewichten identificeren.

Oplossingen.

336. Van collega A. F. Boons uit Tilburg ontving ik bijgaande correctie op de opgave. Hij bewijst dat de volgende configuratie star is.



$ABCD$ en $EFGH$ zijn vierkanten; $AB = 1$, $AE = BF = CG = DH = 1$ en $EF // AB$.
Hij vraagt zich nu af, of de starheid blijft bestaan, als niet $AB = AE$. Verder of een starre figuur van minder dan vijf vierhoeken ook mogelijk is. Liefhebbers kunnen er het hoofd over buigen.

339. Gevraagd wordt een gesloten halve bol te verdelen in half open cirkelbogen.
We merken eerst op dat het mogelijk is een open cirkelboog te verdelen in half open cirkelbogen. Ga uit van een open boog AB. Kies daarop resp. P_1 midden tussen A en B, P_2 midden tussen P_1 en B, P_3 midden tussen P_2 en $B, \dots$ Dan is boog AB de vereniging van de half open bogen AP_1 (open in A), P_1P_2 (open in P_1), P_2P_3 (open in P_2), ...
Noem de begrenzende cirkel van de halve bol C en de pool ervan punt Q. Verdeel de halve bol in:
a. cirkel C; deze is de som van twee half open bogen;

b. een open halve cirkel AQB waarvan A en B op C liggen; deze kan verdeeld worden in half open bogen;
c. de open kwartcirkels DQ waarvan D op C ligt en verschilt van A en B; deze kunnen verdeeld worden in half open bogen.
Hiermee is de verdeling voltooid.

340. Een rij positieve gehele getallen is gedefinieerd door $t_1 = a$, $t_2 = b$, $t_{n+2} = t_n + t_{n+1}$, laatste term = 1976.
Voor welke a en b is de lengte van deze rij maximaal?
De rij is
$t_1 = 1a+0b, t_2 = 0a+1b, t_3 = 1a+1b, t_4 = 1a+2b, t_5 = 2a+3b, t_6 = 3a+5b, t_7 = 5a+8b, \ldots$
Hierin zijn de coëfficiënten van a
1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, . . .
en die van b
0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, . . .
We herkennen hierin de rij van Fibonacci, gedefinieerd door $u_1 = 1$, $u_2 = 1$, $u_{n+2} = n_n + u_{n+}1$
Blijkbaar is
$t_{n+2} = u_n a + u_{n+1} b$
De rij van Fibonacci luidt
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, . . .
We moeten nu in deze rij twee opvolgende termen u_n en u_{n+1} zoeken met de eigenschap dat er positieve gehele a en b bestaan waarvoor
$au_n + bu_{n+1} = 1976$
en waarvoor n maximaal is.
Dit lukt uiteraard niet met 987 en 1597, ook niet met 610 en 987.
Teruggaand vinden we dat het voor het eerst lukt bij 34 en 55.
Er geldt namelijk
$29 \cdot 34 + 18 \cdot 55 = 1976$
Waarmee we gevonden hebben, dat $a = 29$ en $b = 18$. De rij heeft dan 11 termen.

De Minister van Onderwijs en Wetenschappen

brengt ter kennis van belanghebbenden, dat

I. zij, die zich in 1976 wensen te onderwerpen aan het examen *wiskunde m.o. A* zich *uitsluitend* kunnen aanmelden door het examengeld à *f* 60,– vóór 1 april 1976 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter commissie wiskunde m.o., p/a Laan van Parijs 64, Haarlem 1504, met vermelding van volledige naam en adres van de kandidaat en de mededeling *m.o. A*;

II. zij, die zich in 1976 wensen te onderwerpen aan het examen wiskunde *m.o. B* zich *uitsluitend* kunnen aanmelden door het examengeld à *f* 60,– vóór 1 april 1976 over te maken op postrekening 172007 ten name van de voorzitter commissie wiskunde m.o., p/a Laan van Parijs 64, Haarlem 1504, met vermelding van volledige naam en adres van de kandidaat en de mededeling *m.o. B*.

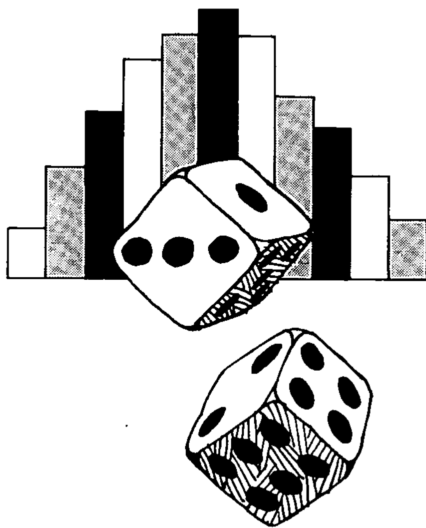
Aanmelding per briefkaart is voortaan niet meer mogelijk.
Na 1 april 1976 ontvangen de kandidaten nadere instructies van de examencommissie.

Namens de minister,
L. J. A. v. Meurs

Mathematische Statistiek voor het vwo

Auteursgroep JAGT

Wolters-Noordhoff



INHOUD